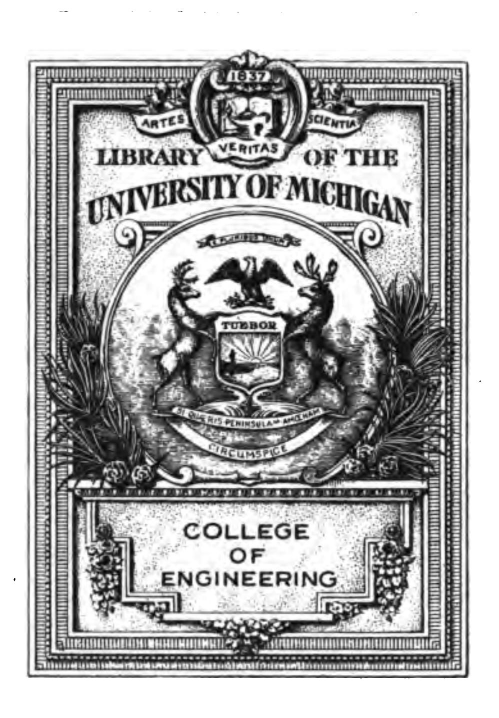
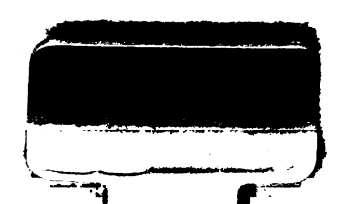


ENGIN. LIB.
TA
405
F69
1925
B 466072
Digitized by Google




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
COLLEGE
OF
ENGINEERING



LES MÉTHODES MODERNES

DE LA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

LES MÉTHODES MODERNES

DE LA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

PAR

M. BERTRAND de FONTVIOLANT

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

DEUXIÈME ÉDITION
revue et augmentée.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C[ie], ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1920

LES MÉTHODES MODERNES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX;

PAR M. BERTRAND DE FONTVIOLANT,
Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

AVANT-PROPOS.

1. Les méthodes modernes de la Résistance des matériaux ont pour objet deux des questions les plus importantes de cette branche de la Mécanique appliquée : la détermination des déformations élastiques et calorifiques, et le calcul des forces de liaisons dans les pièces et les systèmes de pièces hyperstatiques.

Ces méthodes, fondées sur le théorème des forces vives et sur celui du travail virtuel, sont entièrement générales; elles s'appliquent uniformément à tous les cas qui peuvent se présenter. Elles offrent, sur les anciennes méthodes géométriques et cinématiques, l'avantage d'être d'une application plus rapide et de ne pas nécessiter l'introduction, dans les calculs, d'inconnues auxiliaires dont l'élimination est très souvent laborieuse.

Cependant elles sont assez peu répandues en France où, parmi les nombreux ouvrages didactiques sur la Résistance des matériaux, quatre seulement, à notre connaissance, font mention des méthodes modernes, avec des développements plus ou moins étendus, savoir :

Le Traité de *Statique graphique* de Maurice Levy (IVe Partie, 1886, Note I) contient un aperçu de la méthode du général Menabrea et de celle de Mohr, pour le calcul des efforts dans les systèmes articulés à barres surabondantes;

La traduction en français (1901), par Hahn, de la *Résistance des matériaux* de Föppl, expose la méthode générale de Castigliano, pour la détermination des déplacements élastiques et des

forces de liaisons surabondantes dans les pièces et les systèmes de pièces à fibres moyennes;

L'ouvrage de M. Ernest Flamard, intitulé *Calcul des systèmes élastiques de la Construction* (1918), rappelle la méthode de Castigliano et en fait des applications nombreuses et variées aux poutres droites, aux arcs et aux systèmes articulés;

Enfin, le *Cours de Mécanique professé à l'École Polytechnique* par M. Léon Lecornu (t. III, 1918) donne l'Équation générale de l'élasticité des constructions, ainsi que la méthode de Castigliano, avec application à divers systèmes hyperstatiques.

Il nous a paru, dès lors, utile de présenter, ici, un exposé d'ensemble des diverses méthodes modernes, exposé que nous nous sommes efforcé de rendre aussi simple que possible, en nous attachant, d'ailleurs, à faire ressortir les liens étroits, qui unissent ces méthodes. Dans ce second ordre d'idées, nous montrons que la mise en compte des déformations calorifiques, qui jusqu'à présent n'avait été effectuée qu'au moyen du théorème du travail virtuel, peut aussi s'obtenir par application du théorème des forces vives. Nous établissons également que ce dernier théorème permet, aussi bien et plus simplement que le premier, de démontrer le beau théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy.

Il nous a semblé intéressant de faire intervenir la Théorie mathématique de l'Élasticité, afin de mettre en lumière la voie dans laquelle devraient, croyons-nous, être dirigées les recherches des savants relatives à cette théorie, en vue de permettre l'extension des méthodes modernes aux systèmes de corps isotropes, et d'affranchir ainsi le calcul des constructions, des hypothèses de la Résistance des matériaux; mais il ne faut pas se dissimuler que de telles recherches sont extrêmement ardues, à cause des difficultés que présente l'intégration des équations aux dérivées partielles de la Théorie mathématique de l'Élasticité.

Les méthodes fondées sur le théorème des forces vives ont leur origine dans le Mémoire de Clapeyron sur le travail des forces élastiques (1858) [1], et dans celui du général Menabrea intitulé

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVI, p. 208. — *Voir* aussi LAMÉ, *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Élasticité des corps solides* (1866) : Théorème de Clapeyron, p. 80.

Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique (1868) ([1]). La première application du théorème du travail virtuel à l'étude des déformations élastiques a été faite par Mohr, en ce qui concerne les systèmes articulés, sous le titre *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerksträger* (1874) ([2]).

Depuis, ces méthodes ont fait l'objet des recherches de nombreux savants et ingénieurs. On en trouvera un historique très complet, accompagné de minutieuses indications bibliographiques, dans la Thèse de doctorat présentée en 1914, à la Faculté des Sciences de Nancy, par M. Ernest Flamard ([3]).

Rappel de quelques notions de Théorie mathématique de l'Élasticité et de Résistance des matériaux.

Forces élastiques, en Théorie mathématique de l'Élasticité.

2. Considérons un corps solide élastique, en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures.

Soient (*fig.* 1) :

A un point quelconque de ce corps ;

x, y, z les coordonnées rectangulaires de ce point, avant déformation du corps ;

dx, dy, dz les longueurs d'arêtes, mesurées avant déformation, d'un parallélépipède infiniment petit, pris dans le corps, et dont A est l'un des sommets ;

n_x, t_{xy}, t_{xz} ; t_{yx}, n_y, t_{yz} ; t_{zx}, t_{zy}, n_z les composantes parallèles aux axes, des forces élastiques, rapportées à l'unité de surface, sur les trois faces du parallélépipède, ayant le point A comme sommet commun et respectivement normales à Ox, Oy et Oz.

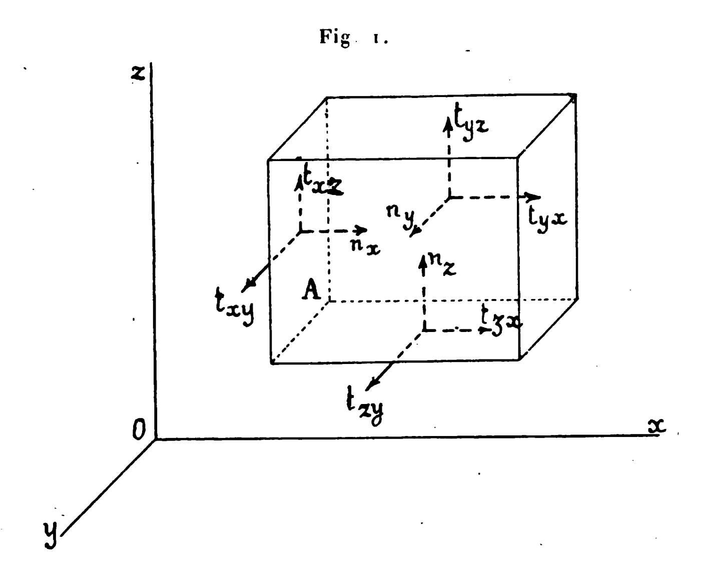
([1]) *Voir* aussi une note lue par le général Menabrea à la séance de l'Académie des Sciences du 31 mai 1858 (*Comptes rendus*, t. XLVI, p. 1056).

([2]) *Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1874, p. 223.

([3]) Ernest Flamard, Inspecteur des Constructions métalliques à la Compagnie des Chemins de fer d'Orléans, *Étude sur les Méthodes nouvelles de la Statique des constructions.*

Pour préciser le signe de ces composantes, nous considérons les forces élastiques comme les actions exercées par les parties du corps situées *à l'extérieur* du parallélépipède, sur celles situées *à*

Fig. 1.



l'intérieur, et nous convenons de les compter positivement dans le sens positif des axes.

Suivant l'usage adopté par les ingénieurs, nous dirons que n et t sont respectivement les *fatigues normales* et les *fatigues tangentielles* sur trois éléments plans, rectangulaires entre eux avant déformation, menés au point A. D'après la convention qui vient d'être faite, un élément est soumis à la compression ou à la traction, selon que la fatigue normale sur cet élément est positive ou négative.

On sait que, sur deux éléments rectangulaires entre eux, les fatigues tangentielles, dirigées normalement à l'intersection de ces éléments, sont égales entre elles, c'est-à-dire que l'on a

$$t_{zy} = t_{yz}, \qquad t_{xz} = t_{zx}, \qquad t_{yx} = t_{xy},$$

ce qui réduit, de neuf à six, le nombre des fatigues inconnues sur les trois éléments rectangulaires considérés.

Paramètres de la déformation élastique
d'un corps isotrope.

3. Soient u, v, w les composantes parallèles aux axes, du déplacement élastique du point A (x, y, z). Les six quantités

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = -\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{yz} = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \gamma_{zx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

définissent la déformation élastique du parallélépipède; nous les appellerons les *paramètres de la déformation élastique*.

ε_x, ε_y, ε_z sont les raccourcissements subis respectivement par les arêtes dx, dy, dz du parallélépipède, rapportés aux longueurs initiales de ces arêtes. Selon que la valeur de ε correspondant à une arête est positive ou négative, il y a réellement raccourcissement ou, au contraire, allongement de cette arête.

γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} sont les augmentations subies par les angles droits que forment entre elles, avant déformation, les arêtes dy et dz, dz et dx, dx et dy du parallélépipède. Selon que la valeur de γ correspondant à l'un de ces angles est positive ou négative, il y a réellement augmentation ou, au contraire, diminution de l'angle considéré. Les quantités γ portent le nom de *glissements* ou *distorsions*.

Les six fatigues normales et tangentielles s'expriment, en fonctions des six paramètres de la déformation élastique, par les formules suivantes :

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{ll} n_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x, & t_{yz} = \mu\gamma_{yz}; \\ n_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y, & t_{zx} = \mu\gamma_{zx}; \\ n_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z, & t_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles λ et μ désignent deux constantes physiques du corps considéré. Ces constantes sont liées aux modules d'élasticité longitudinale et transversale, considérés en Résistance des matériaux, par les relations

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad G = \mu.$$

Inversement, les expressions des paramètres de la déformation élastique, en fonction des fatigues normales et tangentielles, sont

$$(2)\quad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[2(\lambda+\mu)n_x - \lambda(n_y+n_z)], & \gamma_{yz} = \dfrac{t_{yz}}{\mu}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[2(\lambda+\mu)n_y - \lambda(n_z+n_x)], & \gamma_{zx} = \dfrac{t_{zx}}{\mu}; \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[2(\lambda+\mu)n_z - \lambda(n_x+n_y)], & \gamma_{xy} = \dfrac{t_{xy}}{\mu}. \end{cases}$$

Travail des forces élastiques.
Potentiel interne d'un corps isotrope.

4. Au moyen des expressions ci-dessus des fatigues normales et tangentielles, et des paramètres de la déformation élastique, on calcule aisément le travail accompli par les forces élastiques agissant sur les six faces du parallélépipède, pendant que celui-ci passe de son état naturel à un état de déformation défini soit par les valeurs des fatigues, soit par celles des paramètres. Soit ϖ le quotient de ce travail infiniment petit, par le volume $dx\,dy\,dz$ du parallélépipède; c'est le travail des forces élastiques, rapporté à l'unité de volume, au point A (x, y, z). On trouve

$$(3)\quad \varpi = \frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[(\lambda+\mu)(n_x^2+n_y^2+n_z^2)-\lambda(n_x n_y+n_y n_z+n_z n_x)] + \frac{1}{2\mu}(t_{yz}^2+t_{zx}^2+t_{xy}^2),$$

$$(4)\quad \varpi = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2+\mu(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+\frac{\mu}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2).$$

Le travail des forces élastiques, pour le parallélépipède considéré, est $\varpi\,dx\,dy\,dz$. Si donc on décompose le corps en une infinité de parallélépipèdes élémentaires, par des plans normaux aux axes de coordonnées, on voit que le travail total Π des forces élastiques, pour le corps entier, est

$$(5)\quad \Pi = \int\int\int \varpi\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple étant prise pour le volume entier occupé par le corps.

Il est clair que cette expression du travail total des forces élastiques s'applique également à un système de corps reliés entre eux d'une manière quelconque, déformé par des forces extérieures en équilibre, l'intégrale étant alors prise pour le volume total occupé par le système de corps.

On vérifie immédiatement que, si l'on dérive l'expression (4) de ϖ, successivement par rapport à $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xy}$, on retombe sur les expressions (1) de $n_x, \ldots, t_{xy}$, de sorte qu'on a

$$(6) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \varepsilon_x} = n_x, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \gamma_{xy}} = t_{xy}.$$

Les dérivées partielles de la fonction ϖ, par rapport aux six paramètres de la déformation élastique du parallélépipède, sont donc égales aux fatigues normales et tangentielles au point $A(x, y, z)$. On en conclut que les forces élastiques, appliquées sur les faces du parallélépipède, dépendent d'une fonction de forces et que cette fonction est $\varpi\, dx\, dy\, dz$. Par suite, pour le corps entier (ou pour un système de corps), les forces élastiques dépendent de la fonction de forces Π.

La déformation élastique d'un parallélépipède quelconque fait naître, à l'intérieur de celui-ci, des forces moléculaires ; ces forces sont inconnues, mais il est facile d'évaluer le travail qu'elles ont accompli pendant la déformation; en effet, le système de points matériels composant ce parallélépipède étant au repos avant et après la déformation, la somme algébrique des travaux des forces extérieures et intérieures sollicitant ce système est nulle, en vertu du théorème des forces vives; par suite, le travail des forces moléculaires est égal et de signe contraire à celui des forces élastiques; sa valeur est donc $-\varpi\, dx\, dy\, dz$, pour le parallélépipède considéré, et $-\Pi$, pour le corps (ou le système de corps) entier. Conséquemment, en ce qui concerne l'évaluation du travail des forces moléculaires, tout se passe comme si celles-ci dépendaient d'une fonction de forces $-\Pi$ ou, ce qui revient au même, comme si elles dérivaient d'un potentiel Π. Nous dirons, en conséquence, que la fonction Π est le potentiel des forces moléculaires ou, par abréviation, le *potentiel interne* du corps (ou du système de corps) déformé, sous réserve toutefois que, si cette fonction changée de signe représente bien le travail

des forces moléculaires pendant la déformation, elle ne saurait être utilisée pour calculer les valeurs de ces forces qui demeurent inconnues.

Il résulte de ce qui précède que les forces moléculaires forment un *système conservatif :* leur travail ne dépend que de l'état final de déformation et non des états intermédiaires; il est exclusivement fonction des valeurs finales des paramètres de la déformation ou des valeurs finales des fatigues.

La fonction Π est susceptible d'une autre interprétation que voici :

La formule (4) montre que ϖ est essentiellement positif et qu'il s'annule lorsque le corps est à l'état naturel; il en est de même du potentiel total Π; ce dernier est donc minimum lorsque le corps est à l'état naturel, ce qui prouve (fait d'ailleurs évident) que cet état est celui d'équilibre stable des molécules du corps. Si l'on imagine que le corps déformé revient à son état naturel, par suite de la suppression des forces extérieures ayant déterminé sa déformation, le potentiel de ses forces moléculaires passe de la valeur Π à la valeur zéro; elles accomplissent donc un travail positif égal à Π, pendant que les molécules du corps reviennent à leur position d'équilibre stable; or, on sait que ([1]) l'énergie potentielle d'un système matériel occupant une position quelconque est égale au travail essentiellement positif des forces intérieures de ce système, lorsqu'il passe de cette position à sa position d'équilibre stable. Π est donc l'énergie potentielle interne du corps (ou du système de corps) déformé.

Paramètres de la déformation d'un corps isotrope, lorsque celle-ci est à la fois élastique et calorifique.

5. Soit un corps libre; soumettons-le à l'action d'un système quelconque de forces extérieures en équilibre et supposons que sa température s'élève de τ degrés; soit α son coefficient de dilatation linéaire. La déformation subie par un parallélépipède quelconque, pris dans le corps, peut être considérée comme résultant de la superposition de la déformation purement élastique

([1]) Maurice Levy, *Sur le principe de l'énergie*, 1888, p. 9.

due aux forces extérieures et de la dilatation calorifique. Or, cette dilatation ne modifie pas les angles que forment entre elles les arêtes du parallélépipède, lesquelles subissent simplement des allongements qui, rapportés à l'unité de longueur, sont égaux à $\alpha\tau$. Par suite $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xy}$ désignant comme précédemment les six paramètres de la déformation purement élastique, les paramètres de la déformation élastique et calorifique sont

$$\varepsilon_x - \alpha\tau, \quad \varepsilon_y - \alpha\tau, \quad \varepsilon_z - \alpha\tau, \qquad \gamma_{yz}, \quad \gamma_{zx}, \quad \gamma_{xy}.$$

Ces expressions restent valables dans le cas d'un abaissement de température à condition, dans ce cas, de compter τ négativement.

Elles sont également valables pour les corps non libres, ces corps pouvant être considérés comme libres sous l'action des forces qui leur sont directement appliquées et des forces de liaisons correspondantes.

Remarquons que le potentiel interne ne dépend évidemment que de la déformation élastique; par suite, si la déformation est à la fois élastique et calorifique, les expressions du potentiel interne restent celles données au n° 4.

Remarque.

6. Tout ce qui vient d'être dit des corps isotropes s'applique immédiatement aux pièces à fibres moyennes, considérées en Résistance des matériaux, si, selon le point de vue très clair et très précis du général Menabrea, on considère ces pièces comme des corps semi-rigides. Ce point de vue permet de passer des formules de la Théorie mathématique de l'Élasticité aux formules correspondantes de la Résistance des matériaux; mais il est plus simple d'établir directement ces dernières.

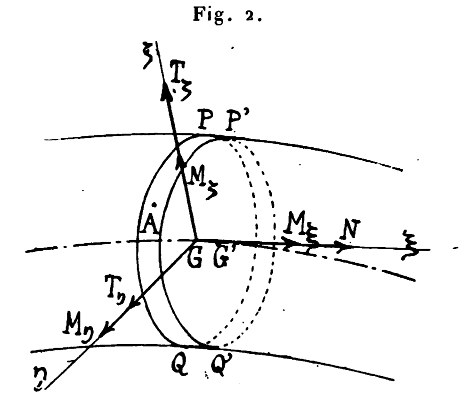
Forces élastiques, en Résistance des matériaux. Éléments de leur réduction.

7. Soient (*fig.* 2) :

Un corps à fibre moyenne plane ou gauche;

PQ et P'Q' deux sections infiniment voisines, normales à la fibre moyenne;

Fig. 2.



G et G' leurs centres de gravité, d'abscisses curvilignes s et $s + ds$, comptées à partir d'une origine prise sur la fibre moyenne, à gauche de G;

Gξ la tangente positive, en G, à la fibre moyenne;

Gη et Gζ les axes principaux d'inertie de la section PQ;

n, $t_η$, $t_ζ$ les composantes parallèles aux axes Gξ, Gη, Gζ de la force élastique, rapportée à l'unité de surface, en un point quelconque A (η, ζ) de la section PQ.

Pour préciser le signe de ces composantes, nous considérons les forces élastiques dans la section PQ, comme les actions exercées par la partie du corps située *à gauche* de cette section, sur la partie située *à droite*, et nous convenons de les compter positivement dans le sens positif des axes de coordonnées.

n est la fatigue normale au point A; $t_η$ et $t_ζ$ sont les fatigues tangentielles; d'après la convention qui vient d'être faite, il y a compression ou traction, au point A, selon que n est positif ou négatif.

Les forces élastiques dans la section PQ forment un système équivalant aux forces extérieures appliquées à gauche de cette section. L'un comme l'autre de ces deux systèmes est réductible, au centre de gravité G de la section PQ :

A l'*effort normal* N dirigé suivant Gξ;

Aux *efforts tranchants* $T_η$ et $T_ζ$ dirigés suivant Gη et Gζ;

Au *couple de torsion* M_ξ, d'axe $G\xi$;
Aux *couples de flexion* M_η et M_ζ, d'axes $G\eta$ et $G\zeta$.

Les couples M_ξ, M_η, M_ζ seront considérés comme positifs, s'ils tendent à faire tourner leurs bras de leviers dans le sens des rotations qu'il faudrait imprimer aux parties positives $G\eta$, $G\zeta$ et $G\xi$ des trois axes de coordonnées, pour les amener respectivement en coïncidence avec $G\zeta$, $G\xi$ et $G\eta$.

Paramètres de la déformation élastique d'un corps à fibre moyenne.

8. Dans la déformation élastique, la section PQ prend, par rapport à la section P'Q' infiniment voisine, un déplacement relatif infiniment petit qui équivaut à une translation égale au déplacement relatif de son centre de gravité G et une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité.

Soient :

1° $$\varepsilon\, ds, \quad \gamma_\eta\, ds, \quad \gamma_\zeta\, ds$$

les composantes de la translation suivant les troix axes de coordonnées

$$G\xi, \quad G\eta, \quad G\zeta,$$

composantes comptées positivement dans le sens positif des axes ;

2° $$\theta_\xi\, ds, \quad \theta_\eta\, ds, \quad \theta_\zeta\, ds$$

les composantes de la rotation autour de ces mêmes axes, comptées positivement ou négativement dans les mêmes conditions que les couples de torsion et de flexion.

Les six quantités ε, γ_η, γ_ζ, θ_ξ, θ_η, θ_ζ définissent la déformation de la *tranche* du corps comprise entre les deux sections PQ et P'Q' ; ce sont les *paramètres de la déformation élastique* de cette tranche.

ε est le raccourcissement, par unité de longueur, ou *raccourcissement unitaire* de l'élément de fibre moyenne $GG' = ds$; selon qu'il est positif ou négatif, il y a réellement raccourcissement ou, au contraire, allongement.

γ_η et γ_ζ sont les *glissements unitaires* de la section PQ suivant les deux directions $G\eta$ et $G\zeta$.

θ_ξ est l'*angle unitaire de la torsion.*

θ_η et θ_ζ sont les *angles unitaires de la flexion*, autour de $G\eta$ et de $G\zeta$.

Désignons par :

Ω l'aire de la section PQ,

I_ξ son moment d'inertie polaire, par rapport à son centre de gravité,

I_η et I_ζ ses moments d'inertie, par rapport à $G\eta$ et $G\zeta$, c'est-à-dire ses moments d'inertie principaux,

E et G les modules d'élasticité longitudinale et transversale.

Les six paramètres de la déformation de la tranche PQP'Q' sont liés aux éléments de la réduction des forces élastiques dans la section PQ (ou des forces extérieures appliquées à gauche de cette section) par les relations

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} N = E\Omega\varepsilon, & T_\eta = G\Omega\gamma_\eta, & T_\zeta = G\Omega\gamma_\zeta; \\ M_\xi = GI_\xi\theta_\xi, & M_\eta = EI_\eta\theta_\eta, & M_\zeta = EI_\zeta\theta_\zeta. \end{array}\right.$$

Les fatigues normales et tangentielles, en un point quelconque $A(\eta, \zeta)$ de la section PQ, sont données par les formules

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{N}{\Omega} + \dfrac{\zeta M_\eta}{I_\eta} - \dfrac{\eta M_\zeta}{I_\zeta}, \\ t_\eta = \dfrac{T_\eta}{\Omega} - \dfrac{\zeta M_\xi}{I_\xi}, \\ t_\zeta = \dfrac{T_\zeta}{\Omega} + \dfrac{\eta M_\xi}{I_\xi}. \end{array}\right.$$

Travail des forces élastiques. Potentiel interne d'un corps à fibre moyenne.

9. Pendant que la tranche PQP'Q' passe de son état naturel à un état quelconque de déformation, les forces élastiques appliquées sur les deux sections PQ et P'Q' limitant cette tranche accomplissent un certain travail; soit ϖ le quotient de ce travail infiniment petit par l'élément $GG' = ds$ de fibre moyenne compris

entre ces deux sections : c'est le travail des forces élastiques, au point G, rapporté à l'unité de longueur de la fibre moyenne.

En fonction des éléments de la réduction des forces élastiques développées dans la section PQ, par la déformation, ϖ est exprimé par la formule

$$(9) \qquad \varpi = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \frac{T_\zeta^2}{G\Omega} + \frac{M_\xi^2}{GI_\xi} + \frac{M_\eta^2}{EI_\eta} + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}\right);$$

et, en fonction des paramètres de la déformation élastique de la tranche, par la formule

$$(10) \qquad \varpi = \frac{1}{2}(E\Omega\varepsilon^2 + G\Omega\gamma_\eta^2 + G\Omega\gamma_\zeta^2 + GI_\xi\theta_\xi + EI_\eta\theta_\eta + EI_\zeta\theta_\zeta).$$

Le travail des forces élastiques, pour la tranche PQP'Q', est $\varpi\, ds$; et, par suite, pour le corps entier, il est

$$(11) \qquad \Pi = \int \varpi\, ds,$$

l'intégrale étant étendue à la longueur totale de la fibre moyenne. Cette formule est évidemment applicable à un système de corps reliés entre eux d'une manière quelconque, à condition de convenir que l'intégrale est étendue à la longueur totale des fibres moyennes de tous les corps composant le système.

Il y a *flexion plane* lorsque : 1° la fibre moyenne est une courbe plane, 2° le corps est de structure symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne, 3° les forces extérieures sont appliquées dans ce plan. Dans ce cas, si l'on suppose que $G\xi\zeta$ est le plan de la fibre moyenne, T_η, M_ξ, M_ζ, γ_η, θ_ξ, θ_ζ sont nuls et, par suite, on a simplement

$$(9') \qquad \varpi = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI}\right),$$

$$(10') \qquad \varpi = \frac{1}{2}(E\Omega\varepsilon^2 + G\Omega\gamma^2 + EI\theta^2),$$

en supprimant les indices ζ et η affectant les lettres T, M et I, γ et θ dans les formules (9) et (10).

De même qu'en Théorie mathématique de l'Élasticité, les forces élastiques dépendent d'une fonction de forces. Pour une tranche quelconque PQP'Q', cette fonction est $\varpi\, ds$; ceci résulte de ce

que, si l'on forme les dérivées partielles de l'expression (10) de ϖ, par rapport aux six paramètres de la déformation, on retombe sur les expressions (7) des six éléments de la réduction des forces élastiques; pour le corps entier (ou pour un système de corps), la fonction de forces est Π. On en conclut, comme précédemment (n° 4), que la fonction Π est le potentiel des forces moléculaires ou *potentiel interne du corps* (ou du système du corps) *déformé* et qu'elle représente également l'*énergie potentielle* de celui-ci.

Paramètres de la déformation,
lorsque celle-ci est à la fois élastique et calorifique.

10. On verrait, de la même façon que précédemment (n° 5), que les paramètres de la déformation *élastique et calorifique* d'une tranche quelconque sont

$$\varepsilon - \alpha\tau, \quad \gamma_\eta, \quad \gamma_\zeta, \quad \theta_\xi, \quad \theta_\eta, \quad \theta_\zeta,$$

$\varepsilon, \dots, \theta_\zeta$ désignant les paramètres de la déformation purement élastique, α le coefficient de dilatation linéaire et τ la variation de température, positive en cas d'élévation, négative en cas d'abaissement.

Première méthode fondée sur le théorème des forces vives.

Principe fondamental des méthodes déduites du théorème des forces vives : Équation de Clapeyron; extension de cette équation.

11. Considérons un corps élastique, isotrope ou à fibre moyenne, ou un système de pareils corps, satisfaisant aux conditions suivantes :

Ce corps, ou ce système, possède un certain nombre d'appuis *simples*, à *rotule* ou à *encastrement;* il est donc astreint à des liaisons dites *liaisons d'appui* ou *liaisons extérieures*. Les corps composant le système sont reliés entre eux, d'une manière quelconque; ils sont donc astreints à des liaisons mutuelles, dites *liaisons intérieures au système*.

Les forces de liaisons extérieures sont ordinairement appelées *réactions d'appuis*.

On dit qu'un corps ou un système est *isostatique* ou *hyperstatique*, selon que les forces de liaisons peuvent ou non être calculées par la Statique pure, c'est-à-dire au moyen des six conditions universelles d'équilibre.

Un corps, ou un système de corps, hyperstatique peut toujours être rendu isostatique, par la suppression de certaines de ses liaisons, sans que son état d'équilibre soit troublé, sous réserve de lui appliquer les forces de liaisons correspondant aux liaisons supprimées. Les liaisons subsistant alors sont dites *liaisons statiques* et celles supprimées, *liaisons surabondantes*.

Un système de corps est hyperstatique *extérieurement* ou *intérieurement*, selon que ses liaisons surabondantes sont extérieures ou intérieures. Un système peut, d'ailleurs, être hyperstatique à la fois extérieurement et intérieurement.

On réalise la suppression des liaisons surabondantes extérieures soit par la suppression complète de certains appuis, soit par le remplacement d'appuis à rotule par des appuis simples, soit enfin par le remplacement d'appuis à encastrement par des appuis à rotule ou par des appuis simples.

La suppression des liaisons surabondantes intérieures s'obtient soit par la suppression d'un certain nombre de contacts existant entre les différents corps du système, soit par des modifications apportées à la façon dont ces contacts ont lieu.

Suivant le nombre et la nature des liaisons d'un corps (ou d'un système de corps) hyperstatique, il existe une seule manière, ou plusieurs, de le rendre isostatique. Ainsi, il n'y a pas d'autre manière de rendre isostatique un arc reposant sur deux appuis à rotules, que de remplacer l'un de ces deux appuis par un appui simple; par contre, on peut rendre isostatique un arc encastré à ses deux extrémités, soit en supprimant purement et simplement l'un des deux appuis à encastrement, soit en substituant à ceux-ci un appui à rotule et un appui simple.

Remarque. — Dans la suite, toutes les fois que la direction d'une force de liaison sera inconnue *a priori* (ce qui est le cas, par exemple, d'une liaison réalisée par un appui à rotule), nous

entendrons par force de liaison, non pas cette force même, mais chacune de ses composantes suivant deux directions arbitrairement choisies. Il importe, en effet, de ne faire intervenir, dans le calcul des forces de liaisons, que des forces de directions connues d'avance.

12. Au corps ou au système de corps considéré, isostatique ou hyperstatique, peu importe, appliquons un système de forces et de couples extérieurs initialement nuls et croissant lentement jusqu'à des valeurs finales F et C. Il en résulte une déformation élastique : le point d'application de l'une quelconque des forces F subit un certain déplacement élastique absolu et la droite aa' joignant les points d'application des deux forces formant un couple C subit une certaine rotation élastique absolue.

Soient :

λ la projection du déplacement élastique du point d'application de la force F, sur la direction de cette force, projection comptée positivement dans le sens même de la force F, négativement en sens contraire ;

φ la projection, sur l'axe du couple C, de la rotation élastique de la droite aa' (par *projection de la rotation*, il faut entendre ici, et également dans la suite de la présente Note, la *projection du vecteur représentatif de la rotation*, cette projection étant d'ailleurs comptée positivement ou négativement selon qu'elle est de même sens que le vecteur représentatif du couple ou de sens contraire) ;

$\mathfrak{T}$ le travail accompli pendant la déformation, par les forces et couples extérieurs.

Le travail des forces de liaisons est essentiellement nul.

Le travail des forces intérieures ou moléculaires est égal à $-\Pi$ (nº 4), Π désignant le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé.

En vertu du théorème des forces vives, on a

$$\mathfrak{T} = \Pi, \tag{12}$$

les points matériels du corps, ou du système, initialement au repos étant parvenus à un nouvel état de repos.

Donc, *le travail des forces et couples extérieurs, directement appliqués, est égal au potentiel interne du corps (ou du système de corps) déformé.*

Conséquemment, ce travail ne dépend que de l'état final de déformation; il est indépendant des états intermédiaires et, par suite, de la façon dont ont varié les forces et couples extérieurs [1]. Pour le calculer, on peut donc se fixer tel mode de variation qu'on juge convenable, de ces forces et couples. Admettons, dès lors, que, pendant la déformation, ils restent constamment dans les mêmes rapports entre eux, de sorte qu'à un état intermédiaire quelconque de la déformation, ils peuvent être représentés par $F\rho$ et $C\rho$, ρ désignant un nombre positif variant de 0 à 1 pendant la déformation complète. A ce même état de déformation, d'après le principe de la superposition des effets élastiques des forces, la projection du déplacement élastique du point d'application de la force $F\rho$, sur la direction de cette force, est $\lambda\rho$ et la projection, sur l'axe du couple $C\rho$, de la rotation élastique de la droite aa', est $\varphi\rho$, λ et φ désignant les valeurs de ces déplacements projetés, à la fin de la déformation.

Pendant le passage de cet état intermédiaire de déformation à l'état infiniment voisin suivant, les forces et couples s'accroissant de $d(F\rho)$ et de $d(C\rho)$, les déplacements projetés correspondants varientde $d(\lambda\rho)$ et de $d(\varphi\rho)$; par suite, ces forces et couples accomplissent, entre ces deux états, un travail élémentaire $d\mathfrak{T}$ ayant pour valeur, aux infiniment petits du second ordre près,

$$d\mathfrak{T} = \sum F\rho\, d(\lambda\rho) + \sum C\rho\, d(\varphi\rho) = \left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right)\rho\, d\rho,$$

les sommes s'étendant à toutes les forces F et à tous les couples C.

Le travail total, pour la déformation entière, est donc

$$\mathfrak{T} = \left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right)\int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right).$$

---

[1] Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'à un système de forces et couples extérieurs donné ne puisse correspondre qu'un seul état de déformation du corps, ce qui, au point de vue physique, peut être considéré comme évident et a, d'ailleurs, été démontré analytiquement par Betti, Kirchhoff et Cosserat (APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, 1903, p. 515).

En portant cette expression de $\mathfrak{T}$ dans la relation (12) déduite du théorème des forces vives, on obtient l'équation fondamentale

$$\frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right) = \text{U}, \tag{13}$$

qui n'est autre, sous une forme différente, que l'équation de Clapeyron [1]. La démonstration qui vient d'en être donnée est, comme on le voit, extrêmement simple.

13. Proposons-nous d'étendre l'équation de Clapeyron au cas où la déformation est, à la fois, élastique et calorifique, ce qui, croyons-nous, n'a pas encore été fait. A cet effet, considérons un système de corps isotropes, isostatique ou hyperstatique ; soumettons-le à l'action de forces et couples extérieurs quelconques et d'une élévation de température initialement nuls et croissant lentement jusqu'à des valeurs finales F, C et τ (τ est compté à partir de la température à laquelle ont été réalisées les liaisons du système). Soient :

1° λ la projection du déplacement élastique et calorifique du point d'application de l'une quelconque F des forces extérieures, sur la direction de cette force ;

2° φ la projection, sur l'axe de l'un quelconque C des couples extérieurs, de la rotation élastique et calorifique de la droite joignant les points d'application des deux forces formant ce couple ;

3°
$$\varepsilon_x - \alpha\tau,\quad \varepsilon_y - \alpha\tau,\quad \varepsilon_z - \alpha\tau,\quad \gamma_{yz},\quad \gamma_{zx},\quad \gamma_{xy},$$

les paramètres de la déformation élastique et calorifique d'un parallélépipède élémentaire, découpé en un point quelconque (x, y, z) du système de corps, par des plans normaux aux axes de coordonnées (n° 5) ;

4°
$$n_x,\quad n_y,\quad n_z$$

les fatigues normales, sur les trois faces de ce parallélépipède, ayant le point (x, y, z) comme sommet commun (n° 2) ;

---

[1] Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'Élasticité des corps solides*, 1866, p. 80.

5° $t_{xy}, t_{xz}; \quad t_{yx}, t_{yz}; \quad t_{zx}, t_{zy},$

les fatigues tangentielles sur ces mêmes faces;

6° $\varpi\, dx\, dy\, dz$ et Π les potentiels internes respectifs de ce même parallélépipède et du système de corps, déformés (n° 4).

Ces diverses notations sont relatives à l'état final de déformation du système; nous les conserverons pour un état intermédiaire quelconque, mais en les accentuant.

Considérons la déformation infiniment petite que prend le système de corps, entre les deux états de déformation intermédiaires, correspondant, le premier, aux valeurs F', C' et τ' des forces et couples extérieurs et de la variation de température; le second, aux valeurs $F' + dF'$, $C' + dC'$ et $\tau' + d\tau'$ de ces mêmes quantités. Pendant cette déformation, le travail des forces et couples extérieurs est égal à celui des forces élastiques, en vertu du théorème des forces vives. Calculons chacun de ces deux travaux :

Travail des forces et couples extérieurs. — Ce travail est, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\sum F'\, d\lambda' + \sum C'\, d\varphi'.$$

Travail des forces élastiques. — Pendant la déformation infiniment petite considérée, les paramètres de la déformation élastique et calorifique d'un parallélépipède quelconque, varient de

$$d\varepsilon'_x - \alpha\, d\tau', \qquad d\varepsilon'_y - \alpha\, d\tau', \qquad d\varepsilon'_z - \alpha\, d\tau', \qquad d\gamma'_{yz}, \quad d\gamma'_{zx}, \quad d\gamma'_{xy},$$

et le potentiel de ce parallélépipède s'accroît de

$$d(\varpi'\, dx\, dy\, dz) = d\varpi'\, dx\, dy\, dz.$$

Le travail des forces élastiques, calculé pour la déformation purement élastique du parallélépipède, définie par les variations $d\varepsilon'_x, \ldots, d\gamma'_{xy}$ des six paramètres de la déformation élastique, est égal à l'accroissement $d\varpi'\, dx\, dy\, dz$ du potentiel interne; le travail de ces mêmes forces, calculé pour la déformation purement calorifique, définie par la variation $-\alpha\, d\tau'$ de l'unique paramètre de la déformation calorifique, est, aux infiniment petits d'ordre supé-

rieur près,

$$-(n'_x\,dy\,dz)\,\alpha\,d\tau'\,dx - (n'_y\,dz\,dx)\,\alpha\,d\tau'\,dy - (n'_z\,dx\,dy)\,\alpha\,d\tau'\,dz$$
$$= -\alpha(n'_x + n'_y + n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz,$$

puisqu'à cette variation correspondent des allongements

$$\alpha\,d\tau'\,dx, \qquad \alpha\,d\tau'\,dy, \qquad \alpha\,d\tau'\,dz$$

des arêtes du parallélépipède et que le travail des forces élastiques tangentielles est nul, la déformation purement calorifique s'effectuant sans distorsions.

Par conséquent, le travail de déformation élastique et calorifique est, pour le parallélépipède considéré,

$$d\varpi'\,dx\,dy\,dz - \alpha(n'_x + n'_y + n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz,$$

et, pour le système de corps entier,

$$d\Pi' - \int\!\!\int\!\!\int \alpha(n'_x + n'_y + n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume occupé par le système.

L'équation exprimant l'égalité du travail des forces et couples extérieurs et du travail des forces élastiques, pendant la déformation infiniment petite considérée du système de corps, est donc

$$(14) \qquad \sum F'\,d\lambda' + \sum C'\,d\varphi' = d\Pi' - \int\!\!\int\!\!\int \alpha(n'_x + n'_y + n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz.$$

L'égalité de ces deux travaux a lieu également pour la déformation complète du système, quel que soit, d'ailleurs, le mode de croissance des forces et couples extérieurs et de la température. Plaçons-nous dans l'hypothèse qu'à un état intermédiaire quelconque de la déformation, on ait, ρ désignant un nombre positif croissant de o à 1 pendant la déformation,

$$F' = F\rho, \qquad C' = C\rho, \qquad \tau' = \tau\rho,$$

et, par suite (ce qui peut être considéré comme évident au point de vue physique),

$$\lambda' = \lambda\rho, \qquad \varphi' = \varphi\rho, \qquad n'_x = n_x\rho, \qquad n'_y = n_y\rho, \qquad n'_z = n_z\rho.$$

Dès lors, dans cette hypothèse, l'équation (14) s'écrit

$$\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right)\rho d\rho = d\Pi' - \alpha\tau\left[\int\int\int(n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz\right]\rho\,d\rho,$$

étant admis que l'élévation de température τ est la même en tous les points du système de corps.

En intégrant entre les limites $\rho = 0$ et $\rho = 1$, qui correspondent respectivement à l'origine et à la fin de la déformation, et en remarquant que l'intégrale de $d\Pi'$, prise pour la déformation complète, est égale à Π, potentiel interne du système déformé, on obtient

$$(15)\quad \frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right) = \Pi - \frac{1}{2}\alpha\tau\int\int\int(n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Telle est l'équation de Clapeyron étendue au cas où la déformation est, à la fois, élastique et calorifique. Bien qu'établie pour un mode de variation particulier des forces et couples extérieurs, et de la température, elle a lieu quelles que soient les valeurs finales F, C et τ de ces quantités, attendu que l'état final de déformation du système est indépendant des états intermédiaires. Mais son premier et son second membre ne représentent respectivement le travail des forces et couples extérieurs et le travail des forces élastiques, que dans le cas du mode de variation particulier dont il s'agit. Au contraire, dans l'équation (13) de Clapeyron, les deux membres représentent ces deux travaux, quel que soit le mode de variation des forces et couples extérieurs et de la température.

Si le système est soumis à un abaissement de la température, il suffit de compter τ négativement dans la formule (15).

La démonstration qui précède, appliquée à un système de corps à fibres moyenne, donne

$$(16)\quad \frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right) = \Pi - \frac{1}{2}\alpha\tau\int N\,ds,$$

N désignant l'effort normal en une section transversale quelconque de l'un quelconque des corps, ds l'élément de fibre moyenne compris entre cette section et la section infiniment voisine, et l'intégrale étant prise tout le long des fibres moyennes des corps du système.

On peut d'ailleurs passer directement de l'équation (15) à l'équation (16), en établissant que, dans tout système de corps à fibres moyennes, on a

$$(17)\qquad \int\int\int (n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz = \int \mathrm{N}\,ds.$$

Voici la démonstration de cette formule que nous aurons à utiliser plus loin.

Évaluons l'intégrale triple, d'abord pour une tranche infiniment mince comprise entre deux sections (S) et (S′) de l'un quelconque des corps, faites en deux points G et G′ de la fibre moyenne, dont la distance GG′ $= ds$. A cet effet, considérons le volume de cette tranche comme formé d'un nombre infiniment grand de parallélépipèdes élémentaires, de volume $dx\,dy\,dz$, dont l'une des deux faces $dy\,dz$ serait placée dans la section (S) et dont les quatre arêtes dx seraient perpendiculaires à cette section. Les corps à fibres moyennes étant, par hypothèse, considérés comme rigides dans le sens transversal à ces fibres, les fatigues n_y et n_z sont nulles; d'autre part, aux infiniment petits du second ordre près et à la convergence près des deux sections (S) et (S′), convergence toujours très faible dans les corps de la Résistance des matériaux, on a

$$dx = ds.$$

Par suite, pour la tranche considérée,

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz = ds \int\int n_x\,dy\,dz.$$

$n_x\,dy\,dz$ représente la force élastique sur l'élément de surface $dy\,dz$ de la section (S); l'intégrale double est la somme algébrique de ces forces, pour toute cette section, somme qui, par définition, est l'effort normal N. Donc, toujours pour la tranche considérée,

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz = \mathrm{N}\,ds.$$

Par conséquent, pour le système de corps entier, on a

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz = \int \mathrm{N}\,ds,$$

cette dernière intégrale étant prise tout le long des fibres moyennes de tous les corps du système. C. Q. F. D.

Théorème des dérivées du travail, de Castigliano.

14. Le corps ou le système de corps, isostatique ou hyperstatique, considéré précédemment (n° **12**) ayant pris son état d'équilibre élastique sous l'action d'un système de forces et couples extérieurs F et C, donnons à ces forces et couples des accroissements infiniment petits, arbitraires dF et dC.

Soient :

$d\lambda$ et $d\varphi$ les accroissements correspondants, positifs ou négatifs, des déplacements projetés λ et φ;

$d\mathfrak{G}$ l'accroissement correspondant du travail des forces et couples extérieurs;

$d\Pi$ l'accroissement correspondant du potentiel interne.

$d\mathfrak{G}$ représente le travail élémentaire accompli par les forces et couples F et C, pendant que ceux-ci croissent de dF et de dC et que, corrélativement, les déplacements projetés croissent de $d\lambda$ et $d\varphi$; il a donc pour expression, aux infiniment petits du second ordre près,

$$d\mathfrak{G} = \sum F\,d\lambda + \sum C\,d\varphi;$$

la substitution de cette expression dans la formule (12) (n° **12**) différentiée, donne

$$d\Pi = \sum F\,d\lambda + \sum C\,d\varphi.$$

D'autre part, en différentiant l'équation fondamentale (13) (n° **12**), on a

$$\sum F\,d\lambda + \sum \lambda\,dF + \sum C\,d\varphi + \sum \varphi\,dC = 2\,d\Pi.$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières équations et en développant la différentielle totale $d\Pi$, on obtient la relation

$$\sum \lambda\,dF + \sum \varphi\,dC = \sum \frac{\partial\Pi}{\partial F}\,dF + \sum \frac{\partial\Pi}{\partial C}\,dC,$$

qui ne peut être satisfaite que si l'on a séparément

$$\lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial F}, \qquad \varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial C}, \tag{18}$$

puisque les accroissements dF et dC sont arbitraires. D'où :

Théorème. — *Si un corps élastique, isotrope ou à fibre moyenne, ou un système de pareil corps (isostatique ou hyperstatique) est soumis à un système quelconque de forces et couples extérieurs:*

1° *La projection, sur la direction de l'une quelconque des forces, du déplacement élastique du point d'application de cette force, est égale à la dérivée partielle, par rapport à cette même force, du potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé.*

2° *La projection, sur l'axe de l'un quelconque des couples, de la rotation élastique de la droite joignant les points d'application des deux forces de ce couple, est égale à la dérivée partielle, par rapport à ce même couple, du potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé.*

Tel est le théorème de Castigliano [1] appelé par cet ingénieur *théorème des dérivées du travail*, dénomination qui se justifie par le fait que, d'après la formule (12) (n° **12**), le potentiel interne est égal au travail des forces extérieures pendant la déformation.

15. Corollaire I. — *Si, parmi les forces extérieures, il y en a deux* F *égales et opposées, l'accroissement élastique* Δl *de la distance* $l =$ AB *de leurs points d'application* A *et* B *est égale à la dérivée partielle* $\frac{\partial \Pi}{\partial F}$ *du potentiel interne par rapport à* F.

En effet, supposons d'abord que les deux forces soient inégales; désignons par F′ celle appliquée en A, par F″ celle appliquée en B;

[1] Castigliano, *Nouvelle théorie de l'équilibre des systèmes articulés* (*Actes de l'Académie de Turin*, 1875); *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques* (Turin, 1879).

on peut toujours poser

$$(a) \qquad F' = k' F, \qquad F'' = k'' F,$$

k' et k'' désignant deux nombres quelconques positifs.

Soient :

$\Delta' l$ l'accroissement élastique de la distance $AB = l$; accroissement qui est différent de Δl, mais lui devient égal dans le cas particulier où $k' = k'' = 1$;

λ' et λ'' les déplacements élastiques des deux points A et B, estimés suivant la direction commune AB des deux forces F' et F'', et comptés positivement, le premier dans le sens de F', le second, dans le sens de F''.

On a évidemment

$$\Delta' l = \lambda' + \lambda''.$$

Mais, d'après le théorème de Castigliano,

$$\lambda' = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'}, \qquad \lambda'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial F''},$$

Π' désignant le potentiel interne qui diffère de Π, mais devient égal à Π dans le cas particulier où $F' = F'' = F$.

Par suite

$$\Delta' l = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} + \frac{\partial \Pi''}{\partial F''},$$

et, en faisant $F' = F'' = F$,

$$(b) \qquad \Delta l = \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial F'}\right)_{F'=F} + \left(\frac{\partial \Pi''}{\partial F''}\right)_{F''=F}.$$

Or, Π', qui est fonction de F' et de F'', peut aussi être considéré comme fonction de F, puisque, par hypothèse, F' et F'' sont liés à F par les relations (a); ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial F} dF = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} dF' + \frac{\partial \Pi''}{\partial F''} dF'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} k' dF + \frac{\partial \Pi'}{\partial F''} k'' dF,$$

ou

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial F} = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} k' + \frac{\partial \Pi'}{\partial F''} k'',$$

ou encore, en faisant $k' = k'' = 1$, ce qui entraîne $F' = F'' = F$

et $\Pi' = \Pi$,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F} = \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial F'}\right)_{F'=F} + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial F''}\right)_{F''=F}.$$

Par suite, l'expression (b) de Δl devient

$$\Delta l = \frac{\partial \Pi}{\partial F}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — *Si, parmi les forces extérieures, il y en a quatre appliquées en quatre points a, a', b, b' situés dans un même plan, si ces forces sont également situées dans ce plan, si celles appliquées en a et en a' constituent un couple C, et si celles appliquées en b et en b' constituent un couple égal et contraire au précédent, la droite aa' subit, relativement à la droite bb', une rotation élastique dont la projection sur l'axe du couple C est égale à la dérivée partielle $\frac{\partial \Pi}{\partial C}$ du potentiel interne par rapport à C.*

Ce corollaire découle de la seconde partie du théorème de Castigliano et se démontre de la même manière que le corollaire I.

Corollaire III. — *Dans le cas d'un corps à fibre moyenne, ou d'un système de pareils corps, si un couple C est appliqué à une section transversale quelconque, la projection, sur l'axe de ce couple, de la rotation élastique de cette section, est égale à la dérivée partielle, par rapport à ce même couple, du potentiel interne du corps, ou du système de corps déformé. De plus, s'il y a flexion plane, ce qui exige que l'axe du couple C soit normal au plan de flexion, cette dérivée représente la rotation même de la section.*

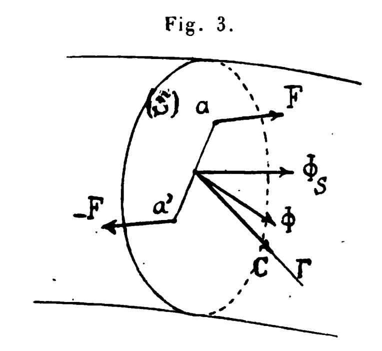
Soient (*fig.* 3) :

a et a' les points d'application, sur la section considérée (S), des deux forces F et — F constituant le couple C;

Γ la direction de l'axe de ce couple, laquelle est normale au plan de F et de — F et, par suite, à la droite aa' contenue dans ce plan;

Φ_S la rotation de la section (S);
Φ la rotation de la droite aa';
φ la projection de cette dernière rotation sur la direction Γ.

Fig. 3.



D'après la seconde partie du théorème de Castigliano, on a

$$\varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial C}.$$

Il suffit donc, pour établir le corollaire, de montrer que la projection de la rotation Φ_S de la section (S), sur la direction Γ de l'axe du couple C, est égale à la projection φ, sur cette même direction, de la rotation Φ de la droite aa'.

Or, la rotation Φ_S peut être décomposée en : 1° une rotation équipollente à Φ, qui amène la droite aa' située dans le plan de la section (S), de sa position initiale à sa position finale; 2° une rotation Ψ autour de aa'; de sorte qu'on a l'équipollence

$$\overline{\Phi_S} = \overline{\Phi} + \Psi.$$

Projetons cette équipollence sur la direction Γ; Ψ étant normale à Γ a une projection nulle; donc la projection de la rotation Φ_S sur la direction Γ est égale à la projection φ de la rotation Φ sur cette même direction. C. Q. F. D.

Application du théorème de Castigliano au calcul des déplacements élastiques.

16. Pour appliquer le théorème de Castigliano au calcul des déplacements élastiques dans les corps ou les systèmes de corps

isotropes, il est nécessaire de former l'expression du potentiel interne, en fonction des forces et couples extérieurs F et C. A cet effet, il faut calculer les six fatigues n et t (ou les six paramètres ε et γ) (nos 2 et 3), en fonction de ces mêmes forces et couples, et les substituer dans l'expression générale (3) (n° 4) [ou (4), même numéro] du potentiel rapporté à l'unité de volume. Or, en l'état présent de la Théorie mathématique de l'Élasticité, ce calcul n'est possible que dans un très petit nombre de cas particuliers. Il s'ensuit qu'actuellement du moins le théorème de Castigliano est en général inutilisable, en ce qui concerne les corps et les systèmes de corps isotropes.

Par contre, il est immédiatement applicable aux corps et aux systèmes de corps à fibres moyennes. En effet, l'expression générale de leur potentiel est, d'après les formules (9) et (11) (n° 9),

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \frac{T_\zeta^2}{G\Omega} + \frac{M_\xi^2}{GI_\xi} + \frac{M_\eta^2}{EI_\eta} + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}\right) ds;$$

et, si l'on porte cette expression dans celles (18) (n° 14) de λ et de φ, on obtient

$$(19) \qquad \lambda = \int\left(\frac{N}{E\Omega}\frac{\partial N}{\partial F} + \frac{T_\eta}{G\Omega}\frac{\partial T_\eta}{\partial F} + \frac{T_\zeta}{G\Omega}\frac{\partial T_\zeta}{\partial F} + \frac{M_\xi}{GI_\xi}\frac{\partial M_\xi}{\partial F} + \frac{M_\eta}{EI_\eta}\frac{\partial M_\eta}{\partial F} + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}\frac{\partial M_\zeta}{\partial F}\right) ds,$$

$$(20) \qquad \varphi = \int\left(\frac{N}{E\Omega}\frac{\partial N}{\partial C} + \frac{T_\eta}{G\Omega}\frac{\partial T_\eta}{\partial C} + \frac{T_\zeta}{G\Omega}\frac{\partial T_\zeta}{\partial C} + \frac{M_\xi}{GI_\xi}\frac{\partial M_\xi}{\partial C} + \frac{M_\eta}{EI_\eta}\frac{\partial M_\eta}{\partial C} + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}\frac{\partial M_\zeta}{\partial C}\right) ds.$$

Dès lors, pour calculer λ et φ, il suffit d'effectuer, au centre de gravité de chaque section, la réduction des forces extérieures appliquées à gauche de cette section (forces de liaisons comprises), ce qui fait connaître $N, \ldots, M_\zeta$ en fonction de F et de C, puis de former les dérivées partielles $\frac{\partial N}{\partial F}, \ldots, \frac{\partial M_\zeta}{\partial F}, \frac{\partial N}{\partial C}, \ldots, \frac{\partial M_\zeta}{\partial C}$, et de substituer ces résultats dans les formules (19) et (20).

Si le corps (ou le système du corps) est soumis à la *flexion plane* (n° 9), l'expression du potentiel interne se simplifie nota-

blement et les formules (19) et (20) se réduisent à

(19′) $$\lambda = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{\partial N}{\partial F} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\partial T}{\partial F} + \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} \right) ds,$$

(20′) $$\varphi = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{\partial N}{\partial C} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\partial T}{\partial C} + \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial C} \right) ds.$$

Les formules qui précèdent ne font connaître les déplacements projetés et les rotations projetées que pour les points d'application des forces extérieures et pour les sections d'application des couples extérieurs. Mais, par un artifice très simple, il est facile de les étendre à un point quelconque et à une section quelconque.

Ainsi, soit à déterminer le déplacement élastique d'un point quelconque A, en projection sur une direction arbitrairement choisie Δ. Appliquons, en ce point et suivant cette direction, *une force auxiliaire* $\mathcal{F}$, de grandeur quelconque, en sus des forces et couples extérieurs donnés F et C; dès lors, les éléments N, T_η, ..., M_ζ de la réduction des forces élastiques dans une section quelconque (ou des forces extérieures de gauche), au centre de gravité de cette section, deviennent $N + \mathfrak{N}$, $+ T_\eta + \mathfrak{T}_\eta$, ..., $M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta$, si l'on désigne par $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ ce que seraient les éléments de cette réduction, si la force $\mathcal{F}$ était seule appliquée, à l'exclusion des forces et couples F et C. Le déplacement élastique du point A, sous l'influence du système F, C, $\mathcal{F}$, a pour expression, en projection sur la direction Δ,

$$\lambda = \int \left[\frac{N + \mathfrak{N}}{E\Omega} \frac{\partial (N + \mathfrak{N})}{\partial \mathcal{F}} + \frac{T_\eta + \mathfrak{T}_\eta}{G\Omega} \frac{\partial (T_\eta + \mathfrak{T}_\eta)}{\partial \mathcal{F}} + \dots + \frac{M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta}{EI_\zeta} \frac{\partial (M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta)}{\partial \mathcal{F}} \right] ds,$$

en vertu de la formule (19).

Pour obtenir le déplacement projeté cherché, il suffit évidemment de faire $\mathcal{F} = 0$, ce qui entraîne $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{T}_\eta = 0$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta = 0$; il vient ainsi, observation faite que N, T_η, ..., M_ζ sont indépendants de $\mathcal{F}$ et que, par suite, $\frac{\partial N}{\partial \mathcal{F}}$, $\frac{\partial T_\eta}{\partial \mathcal{F}}$, ..., $\frac{\partial M_\zeta}{\partial \mathcal{F}}$ sont nuls,

(21) $$\lambda = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathcal{F}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathcal{F}} + \dots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathcal{F}} \right) ds.$$

De même, la rotation d'une section quelconque (S), en projection sur une direction Γ arbitrairement choisie, est exprimée par la formule

$$(22)\qquad \varphi = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{C}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathfrak{C}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{C}} \right) ds,$$

dans laquelle $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, …, $\mathfrak{M}_\zeta$ sont les éléments de la réduction des forces élastiques dans une section quelconque, au centre de gravité de cette section, le corps, ou le système de corps, étant supposé soumis exclusivement à un *couple auxiliaire*, d'intensité $\mathfrak{C}$ quelconque, appliqué à la section (S) et de direction d'axe Γ.

Dans le cas de la flexion plane, la direction Δ doit, bien entendu, être située dans le plan de flexion et la direction Γ être normale à ce plan, et les formules (21) et (22) se réduisent à

$$(21')\qquad \lambda = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{F}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\mathfrak{F}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{F}} \right) ds,$$

$$(22')\qquad \varphi = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{C}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\mathfrak{C}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{C}} \right) ds;$$

φ est alors la rotation même de la section (S).

17. N, T_η, …, M_ζ sont, dans le système de corps considéré, soumis aux forces et couples donnés F et C, les éléments de la réduction, au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces extérieures agissant à gauche de cette section, forces de liaisons comprises.

$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, …, $\mathfrak{M}_\zeta$ sont les éléments de même nature, dans ce système soumis soit à la force auxiliaire $\mathfrak{F}$, soit au couple auxiliaire $\mathfrak{C}$.

Le calcul de ces divers éléments de réduction exige la détermination préalable des forces de liaisons.

Si le système considéré est *isostatique*, cette détermination ne relève que de la Statique pure et n'offre aucune difficulté.

S'il est *hyperstatique*, elle exige l'intervention de la Théorie de l'Élasticité; nous traiterons plus loin cette question. Toutefois, on peut éviter cette intervention, en ce qui concerne le calcul des éléments $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, …, $\mathfrak{M}_\zeta$; voici comment :

Soient, dans un système hyperstatique quelconque, sollicité par les forces et couples F et C donnés, F_s les forces de liaisons surabondantes extérieures et intérieures, forces qui sont inconnues. Considérons le système isostatique, obtenu par la suppression de toutes les liaisons surabondantes de ce système hyperstatique; soumettons-le aux forces et couples F, C et aux forces inconnues F_s : il prend un état de déformation identique à celui du système hyperstatique, soumis seulement aux forces et couples F et C; par conséquent, au lieu de calculer les déplacements élastiques projetés λ et les rotations élastiques projetées φ, dans le système hyperstatique, il revient au même de les calculer dans le système isostatique; dès lors, dans les formules (21) et (22) (n° **16**) : 1° les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_{\eta}$, ..., $\mathfrak{M}_{\zeta}$ deviennent relatifs à ce système isostatique, soumis soit à la force auxiliaire $\mathfrak{F}$, soit au couple auxiliaire $\mathfrak{C}$; 2° les éléments de réduction N, T_{η}, ..., M_{ζ} deviennent également relatifs à ce même système isostatique, soumis aux forces et couples F, C et aux forces F_s inconnues; mais ces derniers éléments ont les mêmes valeurs que dans le système hyperstatique soumis seulement aux forces et couples F et C donnés, puisque l'état de déformation de ces deux systèmes est le même.

Donc, dans l'application des formules (21) et (22) [ou (21') et (22')] à un système hyperstatique, on peut considérer les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_{\eta}$, ..., $\mathfrak{M}_{\zeta}$ (ou $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$), comme afférents au système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique, ce qui les rend calculables par la Statique pure; quant aux éléments de réduction N, T_{η}, ..., M_{ζ}, ils restent, par contre, afférents au système hyperstatique, et leur détermination nécessite l'intervention de la Théorie de l'Élasticité.

Théorème du général Menabrea.
Détermination des forces de liaisons surabondantes.

18. Considérons un corps isotrope ou à fibre moyenne, ou plus généralement un système de pareils corps. Ce système est hyperstatique; il est en équilibre élastique, sous l'action de forces et couples directement appliqués F et C; et nous supposons, ce

qui est le cas le plus complexe, que ses liaisons surabondantes sont, les unes extérieures, les autres, intérieures. Rendons-le isostatique (nº 11) par la suppression des dites *liaisons surabondantes*, en lui appliquant, d'ailleurs, les forces correspondant aux liaisons ainsi supprimées, afin que son état d'équilibre élastique ne soit pas troublé; soient F_{es} et C_{es} une force et un couple quelconques de liaisons extérieures surabondantes, F_{is} et C_{is} une force et un couple quelconques de liaisons intérieures surabondantes. Relativement au système rendu isostatique, ces forces doivent être considérées comme des forces directement appliquées, au même titre que les forces et couples F et C.

Or, du fait même des liaisons extérieures, la projection λ du déplacement élastique du point d'application de la force F_{es}, sur la direction de cette force, est nulle, et la rotation de la section d'application du couple C_{es} est également nulle. On a donc, d'après les formules générales (18) (nº 14),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{es}} = 0.$$

D'autre part, une liaison intérieure quelconque et, en particulier, une liaison intérieure surabondante, consiste ordinairement en ce qu'un point A d'une pièce P du système est astreint à rester invariablement lié à un point B d'une autre pièce Q. Les forces de liaison correspondantes sont une force F_{is} appliquée en A à la pièce P, et une force égale et contraire appliquée en B à la pièce Q; la distance AB de ces deux points, nulle avant déformation, est donc encore nulle après; par suite, en vertu du corollaire I (nº 15) du théorème de Castigliano, on a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_{is}} = 0.$$

Enfin, si les liaisons surabondantes d'une pièce P avec une pièce Q consistent en ce que deux points a et a' de la première sont astreints à rester invariablement liés à deux points b et b' de la seconde, les forces de liaison correspondantes se composent de deux forces égales et opposées appliquées en a et en b et de deux autres forces égales et opposées, appliquées en a' et en b'; si les deux forces appliquées en a et en a' constituent un couple C_{is},

les deux forces appliquées en b et en b' constituent un couple égal et contraire. Dans ce cas, la rotation élastique de la droite aa' relativement à la droite bb' étant nulle, on a, en vertu du corollaire II (n° 15),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_{is}} = 0.$$

En résumé, les dérivées partielles du potentiel interne du système déformé, par rapport aux forces et aux couples de liaisons surabondantes, tant extérieures qu'intérieures, sont nulles. Donc, les valeurs de ces forces et couples rendent maximum ou minimum ce potentiel; il reste à décider entre ces deux alternatives.

Soit A la valeur d'une quelconque des forces F_{es}, valeur satisfaisant, par conséquent, à l'équation

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}} = 0.$$

Pour toute autre valeur attribuée arbitrairement à la force F_{es}, la projection, sur la direction de cette force, du déplacement de son point d'application, n'est pas nulle : elle a pour expression

$$\lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}};$$

or il est évident que si, à partir de cette valeur arbitraire de la force F_{es}, celle-ci prend un accroissement dF_{es}, la variation correspondante $d\lambda$ du déplacement projeté λ est de même sens que F_{es}, c'est-à-dire positive, de sorte qu'on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial F_{es}} > 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F_{es}^2} > 0;$$

cette inégalité, établie pour toute valeur de F_{es} différente de A, a lieu également pour $F_{es} = A$, attendu que, le potentiel Π étant du second degré en F_{es} [1], sa dérivée seconde par rapport à

[1] Π est une fonction du second degré des fatigues normales et tangentielles; or, ces fatigues sont des fonctions linéaires des forces extérieures qui les produisent; donc Π est une fonction du second degré des forces extérieures et, en particulier, de la force F_{es}.

cette variable est indépendante de la valeur attribuée à celle-ci.

On démontre, de la même façon, que les dérivées secondes de Π, par rapport à C_{es}, F_{is} et C_{is} sont positives. Certains auteurs en concluent que Π est minimum, et énoncent de la manière suivante, ou d'une manière approchante, le théorème du général Menabrea :

Dans un système hyperstatique, formé de corps isotropes ou à fibres moyennes, les valeurs que prennent, en fait, les forces et couples de liaisons surabondantes extérieures et intérieures, rendent minimum le potentiel interne du système, considéré comme une fonction de ces forces et couples.

Cet énoncé est très séduisant; mais il va au delà de ce qui est réellement démontré : en effet, la condition du minimum de Π est que la différentielle totale de cette fonction soit positive, pour les valeurs de F_{es}, ..., C_{is} qui annulent les dérivées partielles premières $\frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}}$, ..., $\frac{\partial \Pi}{\partial C_{is}}$; or, il est seulement établi que, pour ces valeurs, les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F_{es}^2}$, ..., $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial C_{is}^2}$ sont positives. Aussi, croyons-nous devoir nous en tenir à l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Dans un système hyperstatique, formé de corps isotropes ou à fibres moyennes, les valeurs que prennent, en fait, les forces et couples de liaisons surabondantes extérieures et intérieures annulent les dérivées partielles premières du potentiel interne considéré comme une fonction de ces forces et couples. En outre, si, dans cette fonction, on remplace ces mêmes forces et couples par leurs valeurs effectives, sauf toutefois l'une de ces forces ou l'un de ces couples, la fonction d'une seule variable ainsi obtenue est minimum pour la valeur effective de cette force ou de ce couple.*

Au surplus, en ce qui concerne les applications, la question de savoir si le potentiel interne est ou non minimum est dénuée d'intérêt : le seul point qui importe est que les valeurs effectives des forces et couples de liaisons surabondantes annulent les dérivées partielles premières de ce potentiel.

Ce théorème est, comme on le voit, un corollaire du théorème de Castigliano; mais, antérieurement aux travaux de cet ingénieur, il avait été énoncé, sous la dénomination de « Principe de minimum du travail élastique », par le général Menabrea ([1]), pour les systèmes articulés; et, dès cette époque, il se tronvait également donné pour un système quelconque de corps à fibres moyennes, ces corps pouvant, suivant une remarque de Mohr et de Winkler, être considérés comme un cas particulier des systèmes articulés ([2]).

Nous indiquerons le mode d'emploi du théorème de Menabrea, pour le calcul des forces et couples de liaisons surabondantes, dans les corps ou les systèmes de corps à fibres moyennes, lorsque nous aurons étendu ce théorème au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique.

Extension du théorème de Castigliano au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique.

19. Cette extension a été faite par M. Ernest Flamard, dans sa Thèse déjà citée, en ce qui concerne les systèmes de corps à fibres moyennes, au moyen du théorème du travail virtuel. Nous allons l'effectuer, au moyen du théorème des forces vives, tant pour les systèmes de corps isotropes que pour ceux à fibres moyennes.

Considérons un système de corps *isotropes*, isostatique ou hyperstatique, déformé par des forces et couples extérieurs F et C et par une élévation de température τ comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées les liaisons du système. (Dans le cas d'un abaissement de température, il suffira d'affecter τ du signe moins.) Appliquons à cette déformation l'équation de Clapeyron généralisée (15) (n° 13)

$$\sum F\lambda + \sum C\varphi = 2\Pi - \int\int\int \alpha\tau(n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz,$$

([1]) MENABREA, *Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique* (Turin, 1868). *Voir* aussi une Note lue par le général Menabrea, à la séance de l'Académie des Sciences du 31 mai 1858 (*Comptes rendus*, t. XLVI, p. 1056).

([2]) Maurice LEVY, *La Statique graphique et ses applications aux constructions*, 4e Partie, 1888, p. 141.

dans laquelle :

λ est la projection du déplacement élastique et calorifique du point d'application de l'une quelconque F des forces extérieures, sur la direction de cette force;

φ la projection, sur l'axe de l'un quelconque C des couples extérieurs, de la rotation élastique de la droite joignant les points d'application des deux forces formant ce couple;

Π le potentiel interne du système de corps déformé;

n_x, n_y, n_z les fatigues normales sur trois éléments menés normalement aux axes de coordonnées, en un point quelconque (x, y, z) du système.

Cette équation a lieu quel que soit le système de valeurs attribué à F, C et τ; par suite, l'équation obtenue en la différentiant par rapport à ces variables indépendantes et par rapport aux quantités λ, φ, Π, n_x, n_y, n_z qui en dépendent, a lieu également; on peut donc écrire

$$(a) \quad \sum F\,d\lambda + \sum \lambda\,dF + \sum C\,d\varphi + \sum \varphi\,dC = 2\,d\Pi - \int\!\!\int\!\!\int \alpha[(n_x + n_y + n_z)\,d\tau + \tau\,d(n_x + n_y + n_z)]\,dx\,dy\,dz;$$

et, dans cette dernière équation, les accroissements dF, dC et $d\tau$ sont arbitraires.

Envisageons la déformation infiniment petite que prend le système de corps, entre les deux états de déformation correspondant, le premier, aux valeurs F, C et τ des forces et couples extérieurs et de l'élévation de température, le second, aux valeurs $F + dF$, $C + dC$ et $\tau + d\tau$ de ces quantités. Pendant cette déformation, le travail des forces et couples extérieurs est égal au travail des forces élastiques; l'équation exprimant ce fait a été établie précédemment : c'est celle (14) (n° 13), laquelle, suppression faite des accents, ce qui n'est qu'une question de notation, est

$$(b) \quad \sum F\,d\lambda + \sum C\,d\varphi = d\Pi - \int\!\!\int\!\!\int \alpha(n_x + n_y + n_z)\,d\tau\,dx\,dy\,dz.$$

Retranchons membre à membre les équations (a) et (b); il

vient

$$(c)\qquad \sum \lambda\, dF + \sum \varphi\, dC = d\Pi - \int\int\int \alpha\tau\, d(n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz.$$

Les fatigues n_x, ..., γ_{xy} et, par suite, le potentiel interne Π dépendent des forces et couples extérieurs F et C directement appliqués et des forces de liaisons. Si le système est hyperstatique, celles-ci dépendent non seulement de F et de C, mais aussi de la température, un tel système n'étant pas librement dilatable; de sorte que, dans l'équation (c), n_x, n_y, n_z et Π sont fonction de F, de C et de τ. Si le système est isostatique, ces quantités sont, au contraire, indépendantes de τ, un tel système étant librement dilatable.

Ceci posé, supposons d'abord que le système considéré soit *isostatique* et, dans cette hypothèse, développons dans l'équation (c) les différentielles totales $d\Pi$ et $d(n_x + n_y + n_z)$; il vient, étant admis que la variation de température est la même en tous les points du système,

$$\begin{aligned}
&\sum \lambda\, dF + \sum \varphi\, dC \\
&\quad = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial F} dF + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial C} dC - \alpha\tau \int\int\int \left(\sum \frac{\partial (n_x + n_y + n_z)}{\partial F} dF \right) dx\, dy\, dz \\
&\qquad - \alpha\tau \int\int\int \left(\sum \frac{\partial (n_x + n_y + n_z)}{\partial C} dC \right) dx\, dy\, dz \\
&\quad = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial F} dF + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial F} dC - \alpha\tau \sum \frac{\partial}{\partial F} \left[\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz \right] dF \\
&\qquad - \alpha\tau \sum \frac{\partial}{\partial C} \left[\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz \right] dC;
\end{aligned}$$

ou, en posant

$$(23)\qquad H = \Pi - \alpha\tau \int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\sum \lambda\, dF + \sum \varphi\, dC = \sum \frac{\partial H}{\partial F} dF + \sum \frac{\partial H}{\partial C} dC.$$

Pour que cette dernière équation soit satisfaite, il faut qu'on ait séparément

$$(24)\qquad \lambda = \frac{\partial H}{\partial F}, \qquad \varphi = \frac{\partial H}{\partial C},$$

puisque les accroissements dF et dC sont arbitraires.

Les formules (23) et (24), établies pour les systèmes *isosta-*

tiques, restent valables pour les systèmes *hyperstatiques*. En effet, soient, pour un système hyperstatique quelconque donné, F_s les forces de liaison surabondantes tant intérieures qu'extérieures. Considérons le système isostatique, obtenu par la suppression de toutes les liaisons surabondantes de ce système hyperstatique; soumettons-le aux forces et couples F, C, F_s et à la variation de température τ; les formules (23) et (24) lui sont applicables; or, son état de déformation est identiquement le même que celui du système hyperstatique donné, soumis aux forces et couples F et C et à la variation de température τ, et, par suite, les diverses quantités λ, φ, Π, n_x, n_y, n_z ont les mêmes valeurs dans ce système isostatique que dans le système hyperstatique; donc les formules (23) et (24) sont également applicables à ce dernier système. C. Q. F. D.

Les deux formules (24) ne diffèrent de celles (18) (n° **14**) que par le remplacement de la fonction Π par la fonction H; *elles se traduisent donc, sauf ce remplacement, par une proposition identique au théorème de Castigliano.*

La démonstration qui précède, appliquée au cas d'un système de corps à *fibres moyennes*, conduit encore aux formules (24), mais avec

$$H = \Pi - \alpha\tau \int N\, ds. \tag{25}$$

On peut, d'ailleurs, passer directement de l'expression (23) de H à l'expression (25), en remarquant que, d'après la formule (17) (n° **13**), on a, pour tout système de corps à fibres moyennes,

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz = \int N\, ds.$$

Notons, en passant, que si, dans la formule (25), on remplace Π par son expression résultant des formules (11) et (9) (n° **9**), on obtient

$$H = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{N^2}{E\Omega} - 2\alpha\tau N \right) + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \ldots + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta} \right] ds. \tag{26}$$

Dans le cas de la flexion plane, cette dernière formule se réduit à

$$H = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{N^2}{E\Omega} - 2\alpha\tau N \right) + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI} \right] ds. \tag{26'}$$

20. La quantité H peut s'interpréter comme suit :

Soient, dans un système de corps à fibres moyennes, hyperstatique, soumis à des forces et couples F et C, ainsi qu'à une variation de température τ, F_s les forces de liaison surabondantes tant intérieures qu'extérieures. Sur le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique, faisons agir les forces et couples F, C, F_s et la variation de température τ; il prend un état de déformation identique à celui du système hyperstatique, soumis aux forces et couples donnés F et C et à la variation de température. Imaginons que cette déformation s'effectue en deux temps, comme suit :

Pendant le premier temps, le système isostatique est soumis aux forces et couples F, C, F_s, de sorte que sa déformation est purement élastique et que, par suite, le travail accompli par les forces élastiques est Π.

Pendant le second temps, il est soumis à la variation de température; les forces élastiques demeurent constantes, le système isostatique étant librement dilatable, et elles accomplissent un travail dont la valeur est, pour une tranche d'épaisseur ds, $-\mathrm{N}\alpha\tau ds$, et, pour le système entier, $-\alpha\tau\int \mathrm{N}\,ds$.

Le travail total des forces élastiques pendant la déformation complète, élastique et calorifique, est donc

$$\Pi - \alpha\tau\int \mathrm{N}\,ds = \mathrm{H};$$

et, si le système est formé de corps isotropes, on trouve, de même, que ce travail total est

$$\Pi - \alpha\tau\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz = \mathrm{H}.$$

M. Ernest Flamard appelle la quantité H, *travail total de déformation d'un système élastique soumis à une variation de température.*

Il est à remarquer que cette dénomination est toute conventionnelle; elle n'est exacte que sous réserve que la déformation s'effectue en deux temps et dans l'ordre indiqué plus haut. En effet, si la variation de température précédait, au contraire, l'appli-

cation des forces et couples F, C et F_s, le travail des forces élastiques se réduirait à Π; si les deux actions étaient simultanées, le travail des forces élastiques serait compris entre Π et H.

Les formules (24) n'en constituent pas moins une extension du théorème de Castigliano, au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique.

Ce qui précède s'applique évidemment aussi aux systèmes isostatiques.

Application du théorème de Castigliano généralisé au calcul des déplacements élastiques et calorifiques, dans les corps et les systèmes de corps à fibres moyennes.

21. Les expressions générales (24) (n° **19**) des déplacements et rotations élastiques et calorifiques se développent exactement de la même manière qu'ont été développées, au n° **16**, les expressions (18) (n° **14**) des déplacements et rotations purement élastiques. On trouve ainsi

$$(27)\qquad \lambda = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{F}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathfrak{F}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{F}} \right] ds,$$

$$(28)\qquad \varphi = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{C}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\mathfrak{C}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{C}} \right] ds.$$

Ces formules ne diffèrent de celles correspondantes (21) et (22) (n° **16**), que par le remplacement de $\frac{N}{E\Omega}$ par $\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right)$. Lorsqu'on les appliquera à un système hyperstatique, on aura soin, selon les indications données précédemment (n° **17**, *in fine*), de calculer les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ non pas dans le système hyperstatique considéré, mais dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique.

Dans le cas où la flexion est plane, on a simplement

$$(27')\qquad \lambda = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{F}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\mathfrak{F}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{F}} \right] ds,$$

$$(28')\qquad \varphi = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{C}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\mathfrak{C}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{C}} \right] ds.$$

Extension du théorème du général Menabrea, au cas où les déformations sont à la fois élastiques et calorifiques. — Détermination des forces de liaisons surabondantes.

22. L'extension du théorème de Castigliano entraîne une extension correspondante de son corollaire, le théorème du général Menabrea; cette extension s'obtient par le remplacement, dans ce dernier théorème, du potentiel interne Π par la fonction H.

Pour appliquer le théorème ainsi généralisé, à la détermination des forces et couples de liaisons d'un système hyperstatique, on introduira les forces et couples de liaisons surabondantes dans la fonction H, dont on formera les dérivées partielles par rapport à ces forces et couples. Les équations obtenues en égalant à zéro ces dérivées feront connaître les forces et couples de liaisons *surabondantes;* la Statique pure fournira ensuite les équations nécessaires pour le calcul des forces et couples de liaisons *statiques.*

Exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes extérieures.

23. Soit (*fig.* 4) un *arc* AB, *encastré à ses deux extrémités*, ce qui signifie que les deux sections transversales dont A et B sont les centres de gravité ne peuvent prendre aucun déplacement élastique.

Cet arc a pour fibre moyenne une courbe plane et il est de structure symétrique par rapport au plan de cette courbe. Il est soumis à des forces quelconques situées dans ce plan, ainsi qu'à une variation τ de température, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisés ses encastrements. Sa flexion est donc plane.

Les réactions élémentaires de l'un quelconque des deux encastrements, celui de gauche par exemple, sont réductibles à leur résultante de translation au point A et à un couple résultant, d'axe normal au plan de la fibre moyenne; soient X et Y les composantes de cette résultante, suivant deux axes rectangulaires quelconques Ax et Ay, et Z le couple résultant. La suppression de l'encastrement de gauche ayant évidemment pour effet de rendre l'arc isostatique, cet encastrement constitue les liaisons surabondantes de cet arc (n° 11) et, par

suite, X, Y et Z sont les deux forces et le couple de liaisons surabondantes extérieures. On a donc, en vertu du théorème du général Menabrea généralisé (n° 22),

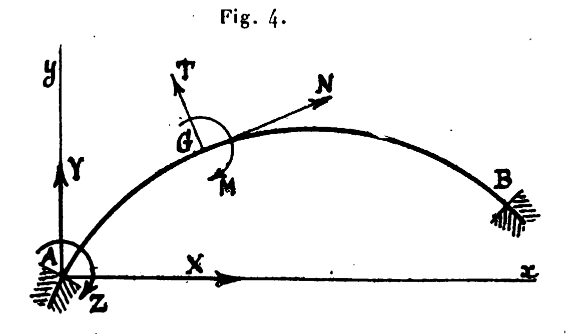
$$\frac{\partial H}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial Z} = 0.$$

La fonction H est exprimée par la formule (26′) (n° 19) valable dans le cas de la flexion plane

$$H = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{N^2}{E\Omega} - 2\alpha\tau N\right) + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI}\right] ds$$

et dans laquelle l'intégrale est étendue à la longueur totale de la fibre moyenne de l'arc. Par suite les trois équations ci-dessus peuvent s'écrire

Fig. 4.



$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right)\frac{\partial N}{\partial X} + \frac{T}{G\Omega}\frac{\partial T}{\partial X} + \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X}\right] ds = 0,\\ &\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right)\frac{\partial N}{\partial Y} + \frac{T}{G\Omega}\frac{\partial T}{\partial Y} + \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Y}\right] ds = 0,\\ &\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right)\frac{\partial N}{\partial Z} + \frac{T}{G\Omega}\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Z}\right] ds = 0.\end{aligned}\right.$$

Ceci posé, désignons par ν, θ et μ les valeurs que prendraient respectivement, en une section quelconque, de centre de gravité G(x, y), les éléments N, T et M de la réduction, en G, des forces extérieures agissant à gauche de cette section, si l'arc était rendu isostatique par la suppression de son encastrement de gauche; ν, θ et μ sont immédiatement calculables par la Statique pure et peuvent par conséquent, dans la suite, être considérés comme connus.

On a évidemment

$$
(b) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \nu + \mathrm{X}\frac{dx}{ds} + \mathrm{Y}\frac{dy}{ds},\\
\mathrm{T} &= \theta - \mathrm{X}\frac{dy}{ds} + \mathrm{Y}\frac{dx}{ds},\\
\mathrm{M} &= \mu - \mathrm{X}y + \mathrm{Y}x + \mathrm{Z};
\end{aligned}
\right.
$$

et, par suite,

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{X}} = \dfrac{dx}{ds}, & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{X}} = -\dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{X}} = -y,\\[2ex]
\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{Y}} = \dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{Y}} = \dfrac{dx}{ds}, & \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{Y}} = x,\\[2ex]
\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{Z}} = 0, & \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{Z}} = 0, & \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{Z}} = 1.
\end{array}
$$

En substituant ces douze expressions dans les équations (a), et en désignant par a et b, les coordonnées du point B, on trouve :

$$
(c) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{X}\int\left[\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{\mathrm{E}\Omega} + \frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\mathrm{G}\Omega} + \frac{y^2}{\mathrm{EI}}\right]ds\\
&\qquad + \mathrm{Y}\int\left[\left(\frac{1}{\mathrm{E}\Omega} - \frac{1}{\mathrm{G}\Omega}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{xy}{\mathrm{EI}}\right]ds - \mathrm{Z}\int\frac{y}{\mathrm{EI}}ds\\
&\qquad = \alpha\tau a + \int\left[-\frac{\nu}{\mathrm{E}\Omega}\frac{dx}{ds} + \frac{\theta}{\mathrm{G}\Omega}\frac{dy}{ds} + \frac{\mu y}{\mathrm{EI}}\right]ds,\\
&\mathrm{X}\int\left[\left(\frac{1}{\mathrm{E}\Omega} - \frac{1}{\mathrm{G}\Omega}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{xy}{\mathrm{EI}}\right]ds\\
&\qquad + \mathrm{Y}\int\left[\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\mathrm{E}\Omega} + \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{\mathrm{G}\Omega} + \frac{x^2}{\mathrm{EI}}\right]ds + \mathrm{Z}\int\frac{x}{\mathrm{EI}}ds\\
&\qquad = \alpha\tau b - \int\left[\frac{\nu}{\mathrm{E}\Omega}\frac{dy}{ds} + \frac{\theta}{\mathrm{G}\Omega}\frac{dx}{ds} + \frac{\mu x}{\mathrm{EI}}\right]ds,\\
&\mathrm{X}\int\frac{y}{\mathrm{EI}}ds - \mathrm{Y}\int\frac{x}{\mathrm{EI}}ds - \mathrm{Z}\int\frac{1}{\mathrm{EI}}ds = \int\frac{\mu}{\mathrm{EI}}ds.
\end{aligned}
\right.
$$

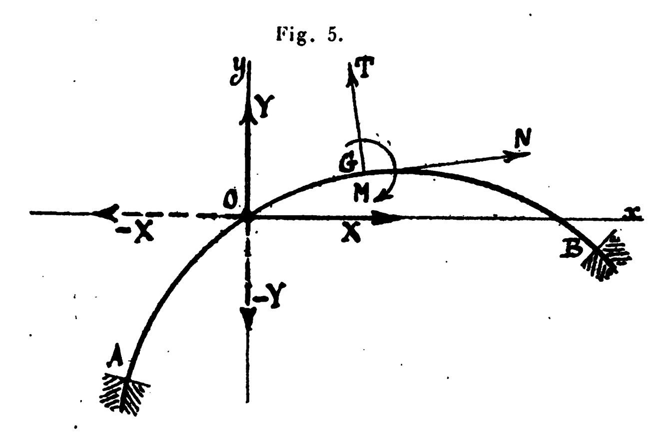
Ces trois équations font connaître les deux forces et le couple de liaisons surabondantes. On peut ensuite calculer les éléments de réduction N, T et M, afférents à une section quelconque, par les formules (b).

Exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes intérieures.

24. Considérons un *arc encastré à ses deux extrémités et comportant une rotule* O (*fig.* 5).

Cet arc a pour fibre moyenne une courbe plane et il est de structure symétrique par rapport au plan de cette courbe. Il est soumis à des forces quelconques situées dans ce plan, ainsi qu'à une varia-

Fig. 5.



tion τ de température, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisés ses encastrements. Sa flexion est donc plane.

L'arc considéré est, en réalité, un système de deux arcs AO et OB encastrés, chacun, à l'une des extrémités et réunis entre eux par la rotule O. L'action de l'arc AO sur l'arc OB est une force appliquée à l'extrémité O de celui-ci, force dont nous désignerons par X et Y les composantes suivant deux axes rectangulaires Ox et Oy; la réaction de l'arc OB sur l'arc AO est égale et contraire à cette action.

Il est clair que le système devient isostatique si l'on supprime la liaison des deux arcs en O. Par conséquent X et Y sont les deux forces de liaisons surabondantes intérieures. On a donc, en vertu du théorème du général Menabrea généralisé,

$$\frac{\partial H}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial Y} = 0,$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{N^2}{E\Omega} - 2\alpha\tau N\right) + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI}\right] ds,$$

ou bien

$$(a) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right)\frac{\partial N}{\partial X} + \frac{T}{G\Omega}\frac{\partial T}{\partial X} + \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X}\right] ds, \\ \displaystyle\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right)\frac{\partial N}{\partial Y} + \frac{T}{G\Omega}\frac{\partial T}{\partial Y} + \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Y}\right] ds, \end{cases}$$

les intégrales étant étendues à la longueur totale AOB des fibres moyennes des deux arcs.

Désignons par ν, θ et μ les valeurs que prendraient respectivement, en une section quelconque, de centre de gravité $G(x, y)$, de l'un quelconque des deux arcs, les éléments N, T et M de la réduction, en G, des forces extérieures agissant à gauche de cette section, si le système était rendu isostatique par la suppression de la liaison, en O, des deux arcs; ν, θ et μ sont immédiatement calculables par la Statique pure et peuvent par conséquent être considérés, dans la suite, comme connus.

Il est facile de voir que l'on a, que la section appartienne à l'un ou l'autre des deux arcs,

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} N &= \nu + X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds},\\ T &= \theta - X\frac{dy}{ds} + Y\frac{dx}{ds},\\ M &= \mu - Xy + Yx,\end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$\frac{\partial N}{\partial X} = \frac{dx}{ds},\qquad \frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{dy}{ds},\qquad \frac{\partial M}{\partial X} = -y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial Y} = \frac{dy}{ds},\qquad \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{dx}{ds},\qquad \frac{\partial M}{\partial Y} = x.$$

En substituant ces neuf expressions dans les équations (a), et en désignant respectivement par a et b les projections sur Ox et Oy de la fibre moyenne entière AOB de l'arc donné, on trouve

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &X\int\left[\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{E\Omega} + \frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{G\Omega} + \frac{y^2}{EI}\right]ds\\ &\qquad + Y\int\left[\left(\frac{1}{E\Omega} - \frac{1}{G\Omega}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{xy}{EI}\right]ds\\ &\qquad = \alpha\tau a + \int\left[-\frac{\nu}{E\Omega}\frac{dx}{ds} + \frac{\theta}{G\Omega}\frac{dy}{ds} + \frac{\mu y}{EI}\right]ds,\\ &X\int\left[\left(\frac{1}{E\Omega} - \frac{1}{G\Omega}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{xy}{EI}\right]ds\\ &\qquad + Y\int\left[\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{E\Omega} + \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{G\Omega} + \frac{x^2}{EI}\right]ds\\ &\qquad = \alpha\tau b - \int\left[\frac{\nu}{E\Omega}\frac{dy}{ds} + \frac{\theta}{G\Omega}\frac{dx}{ds} + \frac{\mu x}{EI}\right]ds.\end{aligned}\right.$$

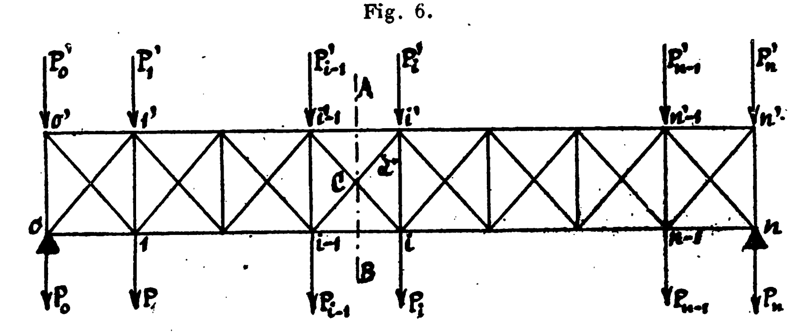
Ces deux équations font connaître les deux forces de liaisons intérieures surabondantes. On peut ensuite calculer les éléments de réduction N, T et M, afférents à une section quelconque, par les formules (b).

Autre exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes intérieures.

25. Prenons comme exemple une *poutre droite, à treillis double, articulée*, reposant sur deux appuis simples (*fig.* 6).

Cette poutre est constituée par des barres rectilignes, dont les fibres moyennes sont situées dans un plan vertical et concourent en

Fig. 6.



des points appelés *nœuds*. En chaque nœud, les barres sont assemblées entre elles par un axe d'articulation normal au plan contenant leurs fibres moyennes.

On appelle :

Éléments de membrures, les barres horizontales;
Montants, les barres verticales;
Diagonales, les barres inclinées.

La partie de la poutre comprenant deux montants consécutifs, ainsi que les deux éléments de membrures et les deux diagonales situées entre ces deux montants, porte le nom de *panneau*. Nous désignerons les panneaux par les numéros d'ordre $1, 2, \ldots, i, \ldots, n-1, n$; les nœuds inférieurs, par les numéros $0, 1, \ldots, i, \ldots, n-1, n$; et les nœuds supérieurs, par ces mêmes numéros accentués.

La poutre est soumise à des charges verticales $P_0, P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_{n-1}, P_n$, appliquées aux nœuds inférieurs, et à des charges $P'_0, P'_1, \ldots, P'_i, \ldots, P'_{n-1}, P'_n$, appliquées aux nœuds supérieurs.

En toute section de l'une quelconque des barres, les forces élastiques sont réductibles à une force unique, dirigée suivant la fibre moyenne de la barre; c'est l'effort normal ou, selon le terme adopté couramment, *l'effort dans la barre* (l'effort tranchant et le couple de flexion sont nuls).

Proposons-nous de calculer les efforts produits par les charges dans toutes les barres de la poutre.

Soient :

X_i et X'_i les efforts dans les deux éléments de membrure $(i-1, i)$ et $(i'-1, i')$; Ω_i et Ω'_i les sections transversales de ces deux barres; a leur longueur commune;

Y_{i-1} et Y_i les efforts dans les deux montants $(i-1, i'-1)$ et (i, i'); ω_{i-1} et ω_i les sections transversales de ces deux montants; b leur longueur commune;

Z_i et Z'_i, S_i et S'_i, c les quantités analogues relatives aux deux diagonales $(i'-1, i)$, et $(i-1, i')$.

Chacun de ces efforts sera considéré comme positif ou négatif selon que la barre correspondante sera comprimée ou tendue.

La poutre est isostatique extérieurement; mais elle est hyperstatique intérieurement. Il existe un grand nombre de manières de la rendre complètement isostatique; adoptons celle consistant à supprimer les liaisons des diagonales $(o, 1')$, ..., $(i-1, i')$, ..., $(n-1, n')$, avec leurs nœuds inférieurs d'assemblage o, ..., $i-1$, ..., $n-1$; dès lors, ces diagonales ne jouent plus aucun rôle dans la poutre; celle-ci se comporte comme si elles étaient supprimées et devient, par suite, un système *réticulaire;* or, on sait qu'un tel système est isostatique intérieurement.

Les liaisons ainsi supprimées sont les liaisons surabondantes intérieures (n° 11). Les forces de liaisons correspondantes sont, pour la diagonale $(i-1, i')$, par exemple, deux forces égales et opposées, ayant même direction que l'effort Z'_i dans cette diagonale, et appliquées, l'une, à l'extrémité rendue libre de ladite diagonale, l'autre, au nœud $i-1$, forces de sens répulsif ou attractif, selon que Z'_i est un effort de compression ou un effort de tension. On peut donc dire que les forces de liaisons intérieures surabondantes sont les efforts Z'_1, ..., Z'_i, ..., Z'_n dans les diagonales $(o, 1')$, ..., $(i-1, i')$, ..., $(n-1, n')$; ces diagonales portent le nom de *barres surabondantes.*

Z'_i étant une force de liaison surabondante, on a, en vertu du théorème du général Menabrea,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z'} = 0, \qquad (a)$$

Π désignant le potentiel interne de la poutre déformée par les charges.

Ce potentiel est égal à la somme des potentiels de toutes les barres constituant la poutre. Or, pour une barre quelconque, si l'on désigne, d'une manière générale par Ω sa section, s sa longueur et N l'effort dans cette barre, le potentiel interne a pour expression, d'après les formules (9′) et (11) (n° 9),

$$\frac{1}{2}\int_0^s \frac{N^2}{E\Omega}\,ds = \frac{1}{2}\,\frac{N^2 s}{E\Omega},$$

puisque en toute section de la barre l'effort tranchant et le couple de flexion sont nuls. Par conséquent

$$\Pi = \sum \frac{1}{2}\,\frac{N^2 s}{E\Omega},$$

la somme étant étendue à toutes les barres de la poutre; ou bien, en désignant par A la somme des potentiels des barres autres que celles du panneau (i) et en ayant égard aux notations indiquées plus haut relativement aux barres de ce panneau,

$$\Pi = A + \frac{1}{2}\,\frac{X_i^2 a}{E\Omega_i} + \frac{1}{2}\,\frac{X_i'^2 a}{E\Omega_i'} + \frac{1}{2}\,\frac{Y_{i-1}^2 b}{E\omega_{i-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{Y_i^2 b}{E\omega_i} + \frac{1}{2}\,\frac{Z_i^2 c}{ES_i} + \frac{1}{2}\,\frac{Z_i'^2 c}{ES_i'}.$$

Portons cette expression du potentiel dans l'équation (a) et chassons le dénominateur E; il vient

$$(b)\quad E\frac{\partial A}{\partial Z_i'} + a\left(\frac{X_i}{\Omega_i}\,\frac{\partial X_i}{\partial Z_i'} + \frac{X_i'}{\Omega_i'}\,\frac{\partial X_i'}{\partial Z_i'}\right) + b\left(\frac{Y_{i-1}}{\omega_{i-1}}\,\frac{\partial Y_{i-1}}{\partial Z_i'} + \frac{Y_i}{\omega_i}\,\frac{\partial Y_i}{\partial Z_i'}\right)$$
$$+ c\left(\frac{Z_i}{S_i}\,\frac{\partial Z_i}{\partial Z_1'} + \frac{Z_i'}{S_i'}\right) = 0.$$

Calculons maintenant, en fonction de Z_i', les expressions de X_i, X_i', Y_{i-1}, Y_i et Z_i, à substituer dans cette équation.

A cet effet, coupons la poutre par un plan vertical AB passant par le point d'intersection C des fibres moyennes des diagonales du panneau (i). Les forces extérieures agissant à gauche de cette section (charges et réactions de l'appui de gauche de la poutre) sont réductibles, au point C, à un effort tranchant vertical T_i que nous compterons positivement dans le sens ascendant et à un couple de flexion M_i; ces deux quantités sont immédiatement calculables par la Statique pure, de sorte que nous pourrons, dans la suite, les considérer comme connues. Les quatre efforts X_i, X_i', Z_i et Z_i' dans les barres coupées par le plan AB forment un système équivalent à la force T_i et au

couple M_i; on peut donc écrire les deux équations de projections, sur un axe vertical et sur un axe horizontal, et l'équation de moments, par rapport au point C, que voici et dans lesquelles α désigne l'angle aigu formé par les fibres moyennes des diagonales avec la verticale :

$$-Z_i \cos\alpha + Z'_i \cos\alpha = T_i,$$
$$X_i + X'_i + Z_i \sin\alpha + Z'_i \sin\alpha = 0,$$
$$-X_i \frac{b}{2} + X'_i \frac{b}{2} = M_i.$$

D'autre part, le nœud $i' - 1$ étant en équilibre sous l'influence de la charge P'_{i-1} et des actions exercées sur lui par les barres qui s'y assemblent, on a l'équation de projections suivante, sur un axe vertical,

$$Z'_{i-1} \cos\alpha + Y_{i-1} + Z_i \cos\alpha - P'_{i-1} = 0.$$

De ces quatre équations on tire

$$(c) \qquad Z_i = Z'_i - \frac{T_i}{\cos\alpha},$$

$$(d) \qquad X_i = -Z'_i \sin\alpha + \frac{T_i \tang\alpha}{2} - \frac{M_i}{b},$$

$$(e) \qquad X'_i = -Z'_i \sin\alpha + \frac{T_i \tang\alpha}{2} + \frac{M_i}{b},$$

$$(f) \qquad Y_{i-1} = -(Z'_{i-1} + Z'_i)\cos\alpha + T_i + P'_{i-1},$$

et, en changeant i en $i+1$ dans la dernière de ces formules,

$$(g) \qquad Y_i = -(Z'_i + Z'_{i+1})\cos\alpha + T_{i+1} + P'_i.$$

En dérivant les cinq formules ci-dessus par rapport à Z'_i, on a

$$(h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial Z_i}{\partial Z'_i} = 1, \qquad \dfrac{\partial X_i}{\partial Z'_i} = -\sin\alpha, \\ \dfrac{\partial X'_i}{\partial Z'_i} = -\sin\alpha, \qquad \dfrac{\partial Y_{i-1}}{\partial Z'_i} = -\cos\alpha, \qquad \dfrac{\partial Y_i}{\partial Z'_i} = -\cos\alpha. \end{array} \right.$$

Si l'on fait successivement $i = 1, 2, \ldots, i-1$, puis $i = i+1$, $i+2, \ldots, n$, dans les formules (c) à (g), on voit immédiatement que les efforts dans toutes les barres de la poutre autres que celles du panneau (i), sont indépendants de Z'_i; il en est de même, par suite, du potentiel interne de ces barres, et l'on a, par conséquent,

$$(i) \qquad \frac{\partial A}{\partial Z'_i} = 0.$$

En effectuant, dans l'équation (b), les substitutions qu'autorisent

les formules (c) à (i), et en tenant compte de ce que

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

on trouve finalement

$$(k) \quad \frac{\cos^3\alpha}{\omega_{i-1}} Z'_{i-1} + \left[\sin^3\alpha\left(\frac{1}{\Omega_i} + \frac{1}{\Omega'_i}\right) + \cos^3\alpha\left(\frac{1}{\omega_{i-1}} + \frac{1}{\omega_i}\right) + \frac{1}{S_i} + \frac{1}{S'_i}\right] Z'_i + \frac{\cos^3\alpha}{\omega_i} Z'_{i+1}$$
$$= \left[\frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}\left(\frac{1}{\Omega_i} + \frac{1}{\Omega'_i}\right) + \frac{1}{S_i\cos\alpha}\right] T_i + \cos^2\alpha\left(\frac{T_i + P'_{i-1}}{\omega_{i-1}} + \frac{T_{i+1} + P'_i}{\omega_i}\right) - \frac{\sin^2\alpha}{b}\left(\frac{1}{\Omega_i} - \frac{1}{\Omega'_i}\right) M_i.$$

Cette équation lie les efforts Z'_{i-1}, Z'_i et Z'_{i+1} dans trois barres surabondantes consécutives $(i-2, i'-1)$, $(i-1, i')$, et $(i, i'+1)$. En y faisant successivement $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ et en tenant compte de ce que $Z'_0 = 0$, $Z'_{n+1} = 0$, $T_{n+1} = 0$ [1], on obtient un système de n équations contenant, la première Z'_1 et Z'_2, la seconde Z'_1, Z'_2 et Z'_3, la troisième Z'_2, Z'_3 et $Z'_4, \ldots$, la $(n-1)^{\text{ième}}$, Z'_{n-2}, Z'_{n-1} et Z'_n, la $n^{\text{ième}}$, Z'_{n-1} et Z'_n.

La résolution de ce système fait connaître les efforts dans les n barres surabondantes $(0, 1')$, $(1, 2')$, $\ldots$, $(n-2, n'-1)$, $(n-1, n')$. L'application des formules générales (c) à (g) donne ensuite les efforts dans toutes les autres barres de la poutre.

Principes de réciprocité.

26. Théorème. — 1° *Si une une force* F_A *égale à l'unité, appliquée en un point* A *d'un corps isotrope ou à fibre moyenne, ou d'un système de pareils corps, isostatique ou hyperstatique, suivant une direction arbitrairement choisie* Δ_A, *imprime à un point* B *un déplacement élastique dont la projection, sur une direction* Δ_B *également arbitraire, est* λ_B^A, *réciproquement une force* F_B *égale à l'unité, appliquée au point* B, *sui-*

(1) Ce qu'on voit immédiatement en supposant la poutre prolongée fictivement, à gauche de son appui de gauche, par un panneau numéroté 0, et, à droite de son appui de droite, par un panneau numéroté $n+1$: les efforts tranchants dans ces deux panneaux additionnels sont évidemment nuls, et il en est de même des efforts dans leurs diagonales,

vant la direction Δ_B, imprime au point A un déplacement élastique dont la projection λ_A^B, sur la direction Δ_A, est égale à λ_B^A.

2° *Si un couple $C_{aa'}$ égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en deux points a et a' et dont l'axe a une direction $\Gamma_{aa'}$ arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à la droite aa', imprime à une droite bb' une rotation élastique dont la projection* (¹) *sur une direction $\Gamma_{bb'}$ arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à bb', est $\varphi_{bb'}^{aa'}$, réciproquement un couple $C_{bb'}$ égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en b et b' et dont la direction de l'axe est $\Gamma_{bb'}$, imprime à la droite aa' une rotation élastique dont la projection $\varphi_{aa'}^{bb'}$ sur la direction $\Gamma_{aa'}$ est égale à $\varphi_{bb'}^{aa'}$.*

3° *Si un couple $C_{aa'}$ égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en deux points a et a' et dont l'axe a une direction $\Gamma_{aa'}$, arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à la droite aa', imprime à un point* B *un déplacement élastique dont la projection sur une direction arbitraire Δ_B est $\lambda_B^{aa'}$, réciproquement, une force F_B égale à l'unité, appliquée en* B *suivant la direction Δ_B, imprime à la droite aa' une rotation élastique dont la projection $\varphi_{aa'}^B$ sur la direction $\Gamma_{aa'}$ est égale à $\lambda_B^{aa'}$* (étant entendu, au point de vue de l'homogénéité, que cette rotation n'est pas mesurée par son angle, mais par la longueur de l'arc intercepté par cet angle, sur une circonférence de rayon égal à l'unité de longueur).

Voici la démonstration de la première partie de ce théorème.

Soient respectivement :

λ_A^A et λ_B^A les projections, sur les directions Δ_A et Δ_B, des déplacements élastiques imprimés aux points A et B, par la force F_A égale à l'unité, appliquée en A, suivant la direction Δ_A;

λ_A^B et λ_B^B les projections, sur ces mêmes directions, des déplacements élastiques imprimés à ces mêmes points, par la force F_B égale à l'unité, appliquée en B, suivant la direction Δ_B.

(Dans ces notations, l'indice inférieur désigne le point qui subit

(¹) Il est rappelé que, par *projection d'une rotation*, il faut entendre *la projection du vecteur représentatif de cette rotation* (n° 12).

le déplacement considéré; l'indice supérieur est celui de la force qui produit ce déplacement.)

Supposons que deux forces F'_A et F'_B, différentes de l'unité, soient appliquées *simultanément*, la première en A, suivant la direction Δ_A, la seconde en B, suivant la direction Δ_B; soient respectivement λ'_A et λ'_B les projections, sur ces deux directions, des déplacements élastiques qu'elles impriment aux points A et B. On a, d'après le principe de la superposition des effets élastiques des forces,

$$(a) \qquad \lambda'_A = \lambda_A^A F'_A + \lambda_A^B F'_B, \qquad \lambda'_B = \lambda_B^A F'_A + \lambda_B^B F'_B,$$

et, en vertu du théorème de Castigliano (n° **14**),

$$(b) \qquad \lambda'_A = \frac{\partial \Pi}{\partial F'_A}, \qquad \lambda'_B = \frac{\partial \Pi}{\partial F'_B},$$

Π désignant le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé par les forces F'_A et F'_B agissant simultanément.

Or, analytiquement, on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F'_A\, \partial F'_B} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial F'_B\, \partial F'_A};$$

et, par suite, à cause des relations (b),

$$\frac{\partial \lambda'_A}{\partial F'_B} = \frac{\partial \lambda'_B}{\partial F'_A},$$

ou, en remplaçant ces deux dérivées partielles, par leurs valeurs déduites des formules (a),

$$\lambda_A^B = \lambda_B^A. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le même mode de démonstration s'applique aux deux autres parties du théorème.

Les trois principes de réciprocité qui viennent d'être énoncés sont souvent appelés, à l'étranger, *principes de Maxwell*, bien que ce savant n'ait établi que le premier et pour les systèmes articulés seulement (¹).

(¹) Clerk MAXWELL, *On the calculation of the equilibrium and stiffuess of framess* (*Philosophical Magazine*, t. XXVII, 1864, p. 294).

Lignes d'influence.

27. Des principes de réciprocité découle une méthode générale de détermination des *lignes d'influence* dans les corps et dans les systèmes de corps à fibres moyennes, astreints à des liaisons surabondantes ([1]). Ces lignes, introduites dans la Résistance des matériaux par Fränkel ([2]) et étudiées d'une manière remarquable par Winkler ([3]) et Maurice Levy ([4]), jouent un rôle important dans le calcul des ponts en métal ou en béton armé; elles fournissent, en effet, le moyen de déterminer les efforts maximum produits dans les divers éléments de ces ponts, par le passage des surcharges mobiles; le cadre limité de la présente Note ne nous permet pas de nous étendre davantage sur ce sujet.

Seconde méthode fondée sur le théorème des forces vives. Équation générale de l'Élasticité.

28. L'exposé qui suit diffère sensiblement dans la forme, mais non dans le fond, de celui présenté dans notre *Mémoire sur les déformations élastiques des pièces et des systèmes de pièces à fibres moyennes planes ou gauches* ([5]). Il est plus général, car

---

([1]) Bertrand de Fontviolant, *Sur la détermination des forces élastiques et de leurs lignes d'influence dans les poutres assujetties à des liaisons surabondantes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVIII, 1889, p. 45); *Methode générale de détermination des lignes d'influence dans les poutres pleines ou réticulaires, assujetties à des conditions surabondantes* (*Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, novembre 1890, p. 742); *Ponts métalliques à travées continues. Méthode de calcul satisfaisant aux prescriptions du Règlement ministériel du* 29 *août* 1891 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXV, 1892, p. 996, et *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, décembre 1892, p. 1105).

([2]) Fränkel, *Théorie des lignes d'influence* (*Civil Ingenieur*, 1876).

([3]) Winkler, *Application des lignes d'influence* (*Revue des Ingénieurs et Architectes de Hanovre*, 1879).

([4]) Maurice Levy, *La Statique graphique et ses applications aux constructions* (2e Partie, 1886; 3e Partie, 1887).

([5]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVII, 1888, p. 383, et *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, août 1888, p. 291, et mars 1889, p. 416.

il concerne non seulement ces pièces, mais aussi les corps isotropes; enfin, il est plus simple et plus rapide et ne nécessite aucune intégration.

Il consiste à donner, du théorème de Betti (1), Boussinesq (2) et Maurice Levy (3), une démonstration nouvelle, très élémentaire, qui ajoute à ce théorème un complément d'où découle immédiatement une relation générale entre les déplacements élastiques et les forces extérieures qui les produisent.

En introduisant ensuite, dans cette relation, les déplacements calorifiques (ce qui n'avait pas été fait dans notre Mémoire précité), nous obtenons l'*équation générale de l'Élasticité* qui, synthétisant toute la théorie des déformations, permet de déterminer les déplacements élastiques et calorifiques d'une construction quelconque et de former, dans tous les cas et sans recherches spéciales, les équations nécessaires pour le calcul des forces de liaisons, dans les corps et les systèmes de corps hyperstatiques, soumis à des forces extérieures quelconques, ainsi qu'à des actions calorifiques.

Ainsi se trouve présentée une démonstration nouvelle, fondée sur le théorème des forces vives, de l'*équation générale de l'Élasticité*, établie dans notre Mémoire y relatif (4), au moyen du théorème du travail virtuel.

Théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy complété.

29. Considérons un système de corps isotropes ou à fibres moyennes, isostatique ou hyperstatique (n° 11) (le cas d'un corps unique sera regardé comme un cas particulier). Soumettons-le à l'action d'un système de m forces extérieures quelconques, que

---

(1) Betti, *Teoria del Elasticità* (1872).

(2) Boussinesq, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I, fasc. 2, 1887, p. 127 et 128.

(3) Maurice Levy, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVII, 1888, p. 414.

(4) *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, octobre 1907, p. 365. — *Voir* aussi Lecornu, *Cours de Mécanique professé à l'École Polytechnique*, t. III, 1918, p. 45, 63, 76.

nous appellerons *système* (A), forces croissant lentement depuis zéro jusqu'à certaines valeurs finales ; soient :

F_{A_i} la valeur finale de l'une quelconque de ces forces,
A_i son point d'application,
Δ_{A_i} sa direction,
$\lambda^A_{A_i}$ la projection, sur la direction Δ_{A_i}, du déplacement élastique du point A_i.

On a, en vertu de l'équation (13) (nº **12**) de Clapeyron,

$$(a) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda^A_{A_i} = \Pi_{F_A},$$

en désignant par Π_{F_A} le potentiel interne du système de corps déformé.

Remplaçons le système de forces (A) par un second système (B), composé de n forces extérieures quelconques, croissant comme les premières; soient :

F_{B_i} la valeur finale de l'une quelconque de ces forces,
B_i son point d'application,
Δ_{B_i} sa direction,
$\lambda^B_{B_i}$ la projection, sur la direction Δ_{B_i}, du déplacement élastique du point B_i.

On a, comme précédemment,

$$(b) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda^B_{B_i} = \Pi_{F_B},$$

en désignant par Π_{F_B} le potentiel interne du système de corps déformé.

Soient maintenant :

$\lambda^B_{A_i}$ la projection, sur la direction Δ_{A_i}, du déplacement élastique du point A_i, sous l'action du système de force (B);
$\lambda^A_{B_i}$ la projection, sur la direction A_{B_i}, du déplacement élastique du point B_i, sous l'action du système de force (A).

Considérons la déformation du système de corps, non plus sous

l'action d'un seul des deux systèmes (A) et (B), mais sous l'action simultanée de ces deux systèmes : en vertu du principe de superposition, le déplacement élastique du point A_i, en projection sur la direction Δ_{A_i}, est $\lambda_{A_i}^{A} + \lambda_{A_i}^{B}$, et celui du point B_i, en projection sur la direction Δ_{B_i}, est $\lambda_{B_i}^{A} + \lambda_{B_i}^{B}$. Cette déformation peut être réalisée de deux manières différentes, comme suit :

1° Appliquons d'abord le système de forces (A), ces forces croissant depuis zéro jusqu'à leurs valeurs finales, puis le système de forces (B), ces dernières forces croissant de la même manière que les premières; la déformation s'effectue ainsi en deux temps.

Pendant le premier temps, les points d'application A_i des forces du système (A) prennent les déplacements $\lambda_{A_i}^{A}$, en projection sur les directions Δ_{A_i}, et le travail de ces forces, qui croissent de zéro à F_{A_i}, est (n° **12**)

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda_{A_i}^{A},$$

tandis que les points B_i prennent les déplacements $\lambda_{B_i}^{A}$, en projection sur les directions Δ_{B_i}.

Pendant le second temps, les points A_i prennent les déplacements $\lambda_{A_i}^{B}$, en projection sur les directions Δ_{A_i} des forces F_{A_i}, et le travail de ces forces, qui demeurent constantes, est

$$\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda_{A_i}^{B},$$

tandis que les points d'application B_i des forces du système (B) prennent les déplacements $\lambda_{B_i}^{B}$, en projection sur les directions Δ_{B_i}, et que le travail de ces forces, qui croissent de zéro à F_{B_i}, est

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda_{B_i}^{B}.$$

Le travail total des deux systèmes de forces (A) et (B) est la somme des trois travaux partiels ci-dessus, et, d'après l'équation (13) (n° **12**) de Clapeyron, il est égal au potentiel interne du système de corps déformé sous l'action simultanée de ces deux

systèmes de forces. On a donc, en désignant par Π_{F_A, F_B} ce potentiel,

$$(c) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda_{A_i}^{A} + \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda_{A_i}^{B} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda_{B_i}^{B} = \Pi_{F_A, F_B}.$$

Inversement, appliquons d'abord le système de forces (B), puis le système de forces (A), ce qui, de la même manière que précédemment, conduit à l'équation

$$(d) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda_{B_i}^{B} + \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda_{B_i}^{A} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda_{A_i}^{A} = \Pi_{F_A, F_B},$$

laquelle ne diffère de l'équation (c) que par la permutation des deux systèmes de forces (A) et (B) et des déplacements élastiques correspondants.

En retranchant les équations (a) et (b) de l'équation (c), et, ensuite, de l'équation (d), on obtient les deux nouvelles équations

$$(e) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda_{A_i}^{B} = \Pi_{F_A, F_B} - (\Pi_{F_A} + \Pi_{F_B}),$$

$$(f) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda_{B_i}^{A} = \Pi_{F_A, F_B} - (\Pi_{F_A} + \Pi_{F_B}),$$

qui se traduisent comme suit :

Théorème. — *Si, à un corps isotrope ou à fibre moyenne, ou à un système de pareils corps, isostatique ou hyperstatique, on applique successivement deux systèmes de force* (A) *et* (B) :

1° *La somme des travaux des forces du système* (A), *pour les déplacements élastiques dus au système* (B), *est égale à la somme des travaux des forces du système* (B), *pour les déplacements élastiques dus au système* (A) ;

2° *Ces deux sommes de travaux sont égales à la différence entre le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé par les deux systèmes de force* (A) *et* (B) *appliqués simultanément et la somme des potentiels internes du corps, ou du système de corps, déformé par chacun de ces deux systèmes de force appliqué à l'exclusion de l'autre.*

La première partie de cette proposition est le théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy ; la seconde est le complément annoncé plus haut (n° 28).

Remarque. — Parmi les forces des deux systèmes (A) et (B) ou de l'un de ces deux systèmes seulement, il peut y en avoir qui forment des couples. Ainsi supposons que le système (A) se compose de p forces ne formant pas de couples et de 2 q forces formant q couples ; soient :

a_i et a'_i les points d'application de deux forces formant un couple,
$C_{a_i a'_i}$ la valeur de ce couple,
$\varphi^{B}_{a_i a'_i}$ la projection, sur l'axe du couple $C_{a_i a'_i}$, de la rotation élastique imprimée à la droite $a_i a'_i$, par le système de force (B) ;

le travail de ce couple, pour ce déplacement de rotation, est $C_{a_i a'_i}\varphi^{B}_{a_i a'_i}$ et, par suite, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda^{B}_{A_i} = \sum_{i=1}^{i=p} F_{A_i}\lambda^{B}_{A_i} + \sum_{i=1}^{i=q} C_{a_i a'_i}\varphi^{B}_{a_i a'_i},$$

ce qui permet d'écrire l'équation (e) sous la nouvelle forme

$$(29) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} F_{A_i}\lambda^{B}_{A_i} + \sum_{i=1}^{i=q} C_{a_i a'_i}\varphi^{B}_{a_i a'_i} = \Pi_{F_A, F_B} - (\Pi_{F_A} + \Pi_{F_B}),$$

si l'on veut y mettre en évidence les rotations projetées $\varphi^{B}_{a_i a'_i}$.

Principes de réciprocité.

30. Les trois principes de réciprocité établis précédemment (n° 26) sont des cas particuliers du théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy. Le premier correspond au cas où les systèmes (A) et (B) se composent chacun d'une force unique égale à l'unité ; le second, au cas où ils se composent chacun d'un couple égal à l'unité ; le troisième, au cas ou le système (A) se compose d'un couple égal à l'unité et le système (B), d'une force égale à l'unité.

Relation générale entre les déplacements élastiques et les forces extérieures qui les produisent.

31. Soit un système de corps isotropes ou à fibres moyennes ; supposons-le hyperstatique extérieurement et intérieurement (n° 11) (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier ; celui d'un corps unique, également). Ce système de corps est déformé par des forces extérieures F directement appliquées.

Appelons :

1°
$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

les projections des déplacements élastiques d'un certain nombre de points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots$$

du système de corps, sur des directions arbitrairement choisies

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2°
$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots$$

les projections des rotations élastiques d'un certain nombre de droites

$$a_1 a'_1, \quad a_2 a'_2, \quad a_3 a'_3, \quad \ldots$$

contenues dans le système de corps, sur des directions

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots$$

arbitrairement choisies parmi les directions normales à ces droites.

Considérons maintenant le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné (1).

Appelons F_{es} les forces de liaisons extérieures surabondantes

(1) Il a été indiqué précédemment (n° 11) que, suivant le nombre et la nature de ses liaisons, un système hyperstatique peut être rendu isostatique, d'une seule manière ou de plusieurs. Nous considérons ici l'un quelconque des systèmes isostatiques ainsi obtenus.



et F_{is} les forces de liaisons intérieures surabondantes du système hyperstatique ; parmi ces forces il peut y en avoir qui forment des couples ; peu importe ; il est d'ailleurs, inutile ici de mettre ces couples en évidence.

Si l'on soumet le système isostatique précité aux forces F, F_{es} et F_{is}, il prend un état d'équilibre élastique identique à celui du système hyperstatique soumis aux seules forces F ; en particulier, dans ce système isostatique, les déplacements élastiques des points $A_1, A_2, A_3, \ldots$ et les rotations élastiques des droites $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$, $a_3 a'_3$, ... sont les mêmes que dans le système hyperstatique.

Supprimons les forces F, F_{es}, F_{is}, et, au système isostatique qui n'est plus alors soumis à aucune force, appliquons :

1° Aux points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots,$$

des forces de grandeurs quelconques, dites *forces auxiliaires*,

$$\mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_3, \quad \ldots$$

suivant les directions

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2° Aux points

$$a_1, a'_1, \quad a_2, a'_2, \quad a_3, a'_3, \quad \ldots,$$

des forces formant des couples, de grandeurs quelconques, dits *couples auxiliaires*,

$$\mathcal{C}_1, \quad \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_3, \quad \ldots$$

d'axes dirigés suivant

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots.$$

Cela posé, appliquons l'équation (29) (n° 29, théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy complété) au système isostatique, en considérant, dans cette équation, le système de forces (A) comme constitué par les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots$, et le système de force (B) comme constitué par les forces F, F_{es} et F_{is} ; il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1\lambda_1 + \mathcal{F}_2\lambda_2 + \mathcal{F}_3\lambda_3 + \ldots + \mathcal{C}_1\varphi_1 + \mathcal{C}_2\varphi_2 + \mathcal{C}_3\varphi_3 + \ldots \\ = \overline{\Pi}_{F,\, F_{es},\, F_{is},\, \mathcal{F},\, \mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F,\, F_{es},\, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F},\, \mathcal{C}}\right),\end{aligned}$$

en désignant par $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}}$, $\overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}$, $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}}$ le potentiel interne total du système isostatique déformé respectivement par : 1° les forces données F et les forces de liaisons surabondantes F_{es} et F_{is} du système hyperstatique ; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$; 3° l'ensemble de ces forces et couples (la barre surmontant la lettre Π est destinée à indiquer que ces potentiels sont relatifs au système isostatique).

Nous écrirons, pour abréger,

$$(30)\qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - (\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}).$$

Équation générale de l'Élasticité.

32. Supposons que le système de corps, hyperstatique, considéré précédemment (n° **31**), soit soumis non seulement à des forces extérieures F directement appliquées, mais encore à une variation de température τ, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées ses liaisons, positivement au-dessus, négativement au-dessous. La déformation de ce système est donc à la fois élastique et calorifique.

Considérons, dans le système, un certain nombre de points et de droites et soient :

1° Pour l'un quelconque A de ces points, λ la projection de son déplacement élastique et calorifique, sur une direction Δ arbitrairement choisie;

2° Pour l'une quelconque aa' de ces droites, φ la projection de sa rotation élastique et calorifique, sur une direction Γ choisie arbitrairement parmi les normales à aa'.

Envisageons le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné. Soumettons-le aux forces extérieures F, aux forces de liaisons surabondantes F_{es} et F_{is} (n° **31**) du système hyperstatique, et à la variation de température τ ; il prend un état de déformation élastique et calorifique identique à celui du système hyperstatique soumis seulement aux forces F et à la variation de température τ ;

en particulier, les valeurs de λ et de φ sont les mêmes dans le système hyperstatique et dans le système isostatique.

Appelons λ' et φ' les valeurs que prendraient λ et φ, si le système isostatique était soumis exclusivement aux forces F, F_{es} et F_{is}, c'est-à-dire si la déformation était purement élastique ; λ_τ et φ_τ les valeurs que prendraient ces mêmes quantités, si ce système était soumis exclusivement à la variation de température, c'est-à-dire si sa déformation était purement calorifique.

On a, en vertu du principe de la superposition des effets élastiques et calorifiques,

$$(a) \qquad \lambda = \lambda' + \lambda_\tau, \qquad \varphi = \varphi' + \varphi_\tau.$$

Ceci posé, examinons séparément la déformation élastique et la déformation calorifique précitées.

En ce qui concerne la première, on a immédiatement, d'après la relation (30) (n° **31**),

$$(b) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda' + \sum \mathcal{C}\varphi' = \Pi_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - (\Pi_{F, F_{es}, F_{is}} + \Pi_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}),$$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ désignant respectivement des forces auxiliaires appliquées aux points A, suivant les directions Δ, et des couples auxiliaires dont les deux forces sont appliquées aux extrémitées des droites aa' et dont les axes ont les directions Γ.

Pour étudier la seconde déformation, imaginons que, suppression faite des forces F, F_{es}, F_{is}, on applique au système isostatique les mêmes forces et couples auxiliaires que ci-dessus ; le système prend un certain état de déformation ; soient :

λ'' la projection du déplacement élastique de l'un quelconque des points A, sur la direction Δ ;
φ'' la projection de la rotation élastique de l'une quelconque des droites aa', sur la direction Γ.

On a, en vertu de l'équation (13) (n° **12**) de Clapeyron,

$$\frac{1}{2}\left(\sum \mathcal{F}\lambda'' + \sum \mathcal{C}\varphi''\right) = \Pi_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}.$$

Soumettons maintenant le système à la variation τ de température ; il prend une déformation calorifique qui se superpose à sa

déformation élastique, de sorte que le déplacement projeté de l'un quelconque des points A et la rotation projetée de l'une quelconque des droites *aa'* deviennent respectivement

$$\lambda'' + \lambda_\tau \quad \text{et} \quad \varphi'' + \varphi_\tau;$$

et l'on a, en vertu de l'équation (15) (n° **13**) de Clapeyron généralisée,

$$\frac{1}{2}\left[\sum \mathcal{F}(\lambda'' + \lambda_\tau) + \sum \mathcal{C}(\varphi'' + \varphi_\tau)\right]$$
$$= \Pi_{\mathcal{F},\mathcal{C}} - \frac{1}{2}\alpha\tau \int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz,$$

n'_x, n'_y, et n'_z désignant les fatigues normales produites, par les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$, sur trois éléments normaux aux axes de coordonnées, pris en un point quelconque (x, y, z) du système isostatique.

En retranchant, membre à membre, les deux équations ci-dessus, on obtient

$$(c) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda_\tau + \sum \mathcal{C}\varphi_\tau = -\alpha\tau \int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz.$$

Ajoutons, membre à membre, les deux équations (*b*) et (*c*), en ayant égard aux relations (*a*); il vient finalement

$$(31) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \Pi_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - (\Pi_{F, F_{es}, F_{is}} + \Pi_{\mathcal{F},\mathcal{C}})$$
$$- \alpha\tau \int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz.$$

Telle est l'*Équation générale de l'élasticité des systèmes de corps isotropes.*

Si, en Théorie mathématique de l'Élasticité, on savait former les expressions des fatigues normales et tangentielles et, par suite, d'après les formules (3) et (5) (n° **4**) celle du potentiel interne, en fonction des forces extérieures produisant ces fatigues, la susdite équation permettrait de résoudre tous les problèmes relatifs aux déformations élastiques et calorifiques des constructions, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux hypothèses de la Résistance des matériaux. Un progrès important serait donc accompli, si l'on parvenait à vaincre les difficultés que présente l'intégration des

équations aux dérivées partielles de la Théorie mathématique de l'Élasticité.

33. En reprenant la démonstration qui précède, dans le cas d'un système de corps à fibres moyennes, on trouve

$$(32)\quad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}\right) - \alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds,$$

en désignant par $\mathfrak{N}$ l'effort normal produit, en une section quelconque de l'un quelconque des corps du système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné, sous l'action des forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

On peut d'ailleurs passer directement de l'équation (31) à l'équation (32), par application de la relation (17) (nº 13) qui donne ici

$$\int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz = \int \mathfrak{N}\, ds.$$

Le second membre de l'équation (32) se transforme comme suit :
D'après la formule (11) (nº 9), on peut écrire :

$$(a)\quad \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}\right) = \int \left[\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}\right)\right] ds,$$

en désignant respectivement par $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}$, $\overline{\varpi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}$, $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}}$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de longueur de la fibre moyenne, de l'un quelconque des corps du système *isostatique* défini précédemment, déformé par : 1º les forces directement appliquées F et les forces de liaisons surabondantes F_{es} et F_{is} du système hyperstatique donné ; 2º les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$; 3º l'ensemble de ces forces et couples. Appelons :

1º $\qquad N,\ T_\eta,\ T_\zeta,\ M_\xi,\ M_\eta,\ M_\zeta$

les éléments de la réduction (au centre de gravité d'une section quelconque, de l'un quelconque des corps) des forces élastiques développées dans cette section, par l'application au système *isostatique*, des forces F, F_{es} et F_{is} (ces éléments sont identiquement

les mêmes que dans le système hyperstatique soumis seulement aux forces F);

2° $\mathfrak{N}, \mathfrak{T}_\eta, \mathfrak{T}_\zeta, \mathfrak{M}_\xi, \mathfrak{M}_\eta, \mathfrak{M}_\zeta$

les éléments de réduction analogues, le système isostatique étant supposé soumis aux forces et couples $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{C}$.

En vertu du principe de superposition, si ce système est soumis à l'action simultanée des forces et couples F, F_{es} F_{is}, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{C}$, les éléments de réduction deviennent

$$N + \mathfrak{N}, \quad T_\eta + \mathfrak{T}_\eta, \quad T_\zeta + \mathfrak{T}_\zeta, \quad M_\xi + \mathfrak{M}_\xi, \quad M_\eta + \mathfrak{M}_\eta, \quad M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta.$$

Cela posé, d'après la fornule (9) (n° 9), on a

$$\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \ldots + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}\right).$$

Or, cette expression de $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}$ est une fonction homogène et du second degré des six quantités N, T_η, ..., M_ζ; et, pour obtenir les expressions de $\overline{\varpi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{C}}$ et de $\overline{\varpi}_{F, F_{is}, F_{es}, \mathfrak{F}, \mathfrak{C}}$, il suffit d'y remplacer respectivement ces six quantités, d'abord par $\mathfrak{N}, \mathfrak{T}_\eta, \ldots, \mathfrak{M}_\zeta$, puis par $N + \mathfrak{N}$; $T_\eta + \mathfrak{T}_\eta, \ldots, M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta$. On a donc, d'après une propriété des fonctions homogènes et du second degré [1],

$$\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}, \mathfrak{C}} - \left(\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{C}}\right)$$
$$= \mathfrak{N}\frac{\partial\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}}{\partial N} + \mathfrak{T}_\eta\frac{\partial\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}}{\partial T_\eta} + \ldots + \mathfrak{M}_\zeta\frac{\partial\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}}{\partial M_\zeta};$$

ou, en remplaçant les dérivés partielles par leurs valeurs déduites

---

[1] Voici l'énoncé de cette propriété établie par Euler. Soient:

$f(x, y, \ldots)$ une fonction, homogène et du second degré, d'un nombre quelconque de variables $x, y, \ldots$;

$x', y', \ldots$ un système de valeurs quelconques attribuées à ces variables.

On a identiquement

$$f[x + x'), (y + y', \ldots)] - [f(x, y, \ldots) + f(x', y', \ldots)]$$
$$= x'\frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial x} + y'\frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial y} + \ldots = x\frac{\partial f(x', y', \ldots)}{\partial x'} + y\frac{\partial f(x', y', \ldots)}{\partial y'} + \ldots$$

de l'expression de $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}$,

$$\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - (\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}) \\ = \mathfrak{N} \frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \mathfrak{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}.$$

Par suite, en substituant dans la formule (a), on a

$$(b) \qquad \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - (\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}) \\ = \int \left[\mathfrak{N} \frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \mathfrak{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \right] ds.$$

Et, dès lors, l'équation (32) devient

$$(33) \quad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \int \left[\mathfrak{N} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \mathfrak{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \mathfrak{T}_\zeta \frac{T_\zeta}{G\Omega} \right. \\ \left. + \mathfrak{M}_\xi \frac{M_\xi}{GI_\xi} + \mathfrak{M}_\eta \frac{M_\eta}{EI_\eta} + \mathfrak{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \right] ds.$$

Dans les applications il importe de ne pas perdre de vue que :

1° Les déplacements projetés λ et φ, ainsi que les éléments N, T_η, ..., M_ζ de la réduction au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces élastiques agissant dans cette section (ou, ce qui revient au même, des forces extérieures appliquées à gauche de cette section), sont relatifs au système *hyperstatique* donné, soumis aux forces données F ;

2° Les éléments de réduction similaires $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ sont relatifs au système *isostatique* obtenu par la suppression des liaisons surabondantes extérieures et intérieures du système hyperstatique donné, système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$; ces derniers éléments, étant statiquement déterminés, se calculent très aisément.

Il va de soi que l'équation (33) reste valable dans le cas où le système donné est isostatique ; toutes les quantités qui y entrent sont alors relatives à ce système isostatique.

34. *Rotation élastique et calorifique d'une section quelconque.* — Il est utile, au point de vue des applications, de faire

intervenir dans l'équation (33) (n° **33**) la projection, sur une direction Γ arbitrairement choisie, de la rotation élastique et calorifique d'une section transversale quelconque (S) de l'un quelconque des corps; voici comment :

Dans la section considérée (S), menons une droite aa' de direction normale à Γ [ce qui est toujours possible; il suffit, pour cela, que aa' soit dirigée suivant l'intersection de la section (S), avec un plan normal à Γ]; appliquons, en a et en a', deux forces formant un couple auxiliaire $\mathcal{C}$, d'axe dirigé suivant Γ; à ce couple $\mathcal{C}$ correspondra, dans l'équation (33), un terme $\mathcal{C}\varphi$, où φ désignera la projection sur la direction Γ de la rotation de la droite aa'. Or, par les considérations cinématiques déjà utilisées (n° **15**) pour la démonstration du corollaire III du théorème de Castigliano, on établit aisément que cette projection est égale à celle de la rotation de la section (S), sur la direction Γ. On peut donc dire que, dans chacun des termes $\mathcal{C}\varphi$ de l'équation (33), φ représente la projection, sur une direction arbitrairement choisie Γ, de la rotation d'une section quelconque (S), à condition que le couple auxiliaire $\mathcal{C}$ soit appliqué sur cette section et que son axe ait la direction Γ.

35. *Cas de la flexion plane.* — Si le corps, ou le système de corps, considéré, isostatique ou hyperstatique, est soumis à la flexion plane, en toute section, les éléments de la réduction des forces élastiques sont exclusivement un effort normal N, un effort tranchant T situé dans le plan de la ou des fibres moyennes (plan de flexion) et un couple de flexion M, d'axe normal à ce plan. Par suite, l'équation (33) (n° **33**) se réduit à

$$(33') \qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \int \left[\mathcal{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathcal{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathcal{M}\frac{M}{EI} \right] ds.$$

Dans l'utilisation de cette dernière formule, on appliquera :

1° Les forces auxiliaires $\mathcal{F}$, en des points situés dans le plan de flexion et suivant des directions Δ menées dans ce plan;

2° Les couples $\mathcal{C}$, sur des sections transversales, en dirigeant leurs axes normalement à ce même plan.

Il s'ensuivra que les quantités λ seront les projections des

déplacements des points considérés, sur les directions Δ, et que les quantités φ seront les rotations mêmes des sections considérées.

Expressions générales des déplacements élastiques et calorifiques, dans les corps et les systèmes de corps à fibres moyennes.

36. Proposons-nous de former l'expression générale :

1° De la projection λ du déplacement élastique et calorifique d'un point quelconque A, sur une direction abitrairement choisie Δ;

2° De la projection φ de la rotation élastique et calorifique d'une section quelconque (S), sur une direction arbitrairement choisie Γ.

Ces deux expressions découlent immédiatement de l'équation générale de l'élasticité, prise sous la forme (33) (n° 33).

Pour obtenir la première, il suffit de ne faire intervenir, dans cette équation, qu'une seule force auxiliaire $\mathcal{F}$, de grandeur quelconque, appliquée en A, suivant la direction Δ; on obtient ainsi

$$(34) \qquad \lambda = \int \left[\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{F}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathcal{T}_\eta}{\mathcal{F}} \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \frac{\mathcal{M}_\zeta}{\mathcal{F}} \frac{M}{EI_\zeta} \right] ds.$$

Pour obtenir la seconde, il suffit de ne faire intervenir, dans cette même équation, qu'un seul couple auxiliaire $\mathcal{C}$, de grandeur quelconque, d'axe dirigé suivant Γ; ce qui donne

$$(35) \qquad \varphi = \int \left[\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{C}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathcal{T}_\eta}{\mathcal{C}} \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \frac{\mathcal{M}_\zeta}{\mathcal{C}} \frac{M}{EI_\zeta} \right] ds.$$

On ne perdra pas de vue que, si le système considéré est hyperstatique, les éléments de réduction $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}_\eta$, ..., $\mathcal{M}_\zeta$ doivent être calculés dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique (n° 33, *in fine*).

Cas d'un système soumis à la flexion plane. — Dans ce cas,

les formules précédentes se réduisent à

$$(34') \qquad \lambda = \int \left[\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{F}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{F}} \frac{T}{G\Omega} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{F}} \frac{M}{EI} \right] ds,$$

$$(35') \qquad \varphi = \int \left[\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{C}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{C}} \frac{T}{G\Omega} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{C}} \frac{M}{EI} \right] ds.$$

Rappelons que, dans ce dernier cas, l'axe du couple auxiliaire $\mathcal{C}$, appliqué à la section considérée (S), doit être dirigé normalement au plan de flexion et que φ est la rotation même de cette section.

Formules de M. Ernest Flamard.

37. Si dans l'équation générale de l'élasticité (32) (n° **33**), relative aux systèmes de corps à fibres moyennes, on fait intervenir exclusivement d'abord une seule force auxiliaire $\mathcal{F}$, puis un seul couple auxiliaire $\mathcal{C}$, on obtient les deux formules

$$(a) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\mathcal{F}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}} \right) - \alpha\tau \displaystyle\int \mathcal{N}\, ds \right], \\ \varphi = \dfrac{1}{\mathcal{C}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{C}} \right) - \alpha\tau \displaystyle\int \mathcal{N}\, ds \right], \end{cases}$$

qui se réduisent, si le système de corps n'est soumis à aucune variation de température, à

$$(b) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\mathcal{F}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}} \right) \right], \\ \varphi = \dfrac{1}{\mathcal{C}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{C}} \right) \right]. \end{cases}$$

Ainsi qu'on le vérifie aisément si, au contraire, le système est soumis à une variation de température, on peut écrire les deux formules (a) sous la forme

$$(c) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\mathcal{F}} \left[\overline{H}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}} - \left(\overline{H}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}} \right) \right], \\ \varphi = \dfrac{1}{\mathcal{C}} \left[\overline{H}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{C}} - \left(\overline{H}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{C}} \right) \right], \end{cases}$$

en y introduisant la fonction H exprimée par la formule (25)

(n° 19), et en convenant : que $\overline{H}_{F, F_{es}, F_{is}}$ représente la valeur de la fonction H afférente au système isostatique soumis aux forces F, F_{es}, F_{is} et à la variation τ de température; que $\overline{H}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}}$ et $\overline{H}_{F, F_{es}, E_{is}, \mathcal{C}}$ représentent respectivement les valeurs que prend cette même fonction, lorsque le système isostatique est soumis, en outre, à la force auxiliaire $\mathcal{F}$ ou au couple auxiliaire $\mathcal{C}$.

Les formules (*b*) et (*c*) ont été établies, autrement d'ailleurs qu'il vient d'être indiqué, par M. Ernest Flamard, dans sa Thèse de doctorat déjà citée. Elles restent valables dans le cas des systèmes isotropes.

Accord entre les résultats des deux méthodes fondées sur le théorème des forces vives.

38. Comparons les expressions générales (27) (n° 21) et (34) (n° 36) de la projection du déplacement élastique et calorifique d'un point quelconque A, sur une direction arbitrairement choisie Δ,

$$\lambda = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{F}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathcal{T}_\eta}{d\mathcal{F}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathcal{M}_\zeta}{d\mathcal{F}} \right] ds,$$

$$\lambda = \int \left[\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{F}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathcal{T}_\eta}{\mathcal{F}} \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \frac{\mathcal{M}_\zeta}{\mathcal{F}} \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \right] ds,$$

expressions obtenues respectivement par la première et par la seconde méthode fondées sur le théorème des forces vives.

Dans ces deux formules, $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}_\eta$, ..., $\mathcal{M}_\zeta$ sont les éléments de la réduction, au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces élastiques développées dans cette section, par l'application de la force auxiliaire $\mathcal{F}$ au point A, suivant la direction Δ; et, si le système est hyperstatique, ces éléments doivent, qu'on utilise l'une ou l'autre des deux formules, être calculés dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique. Or, en vertu du principe de la superposition des effets des forces, les forces élastiques dans une section quelconque et, par suite, les éléments $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$, ..., $\mathcal{M}$ de leur réduction, sont proportionnels

à la force extérieure $\mathcal{F}$ qui les produit; on peut donc écrire :

$$\mathcal{N} = a\mathcal{F}, \qquad \mathcal{T}_\eta = b\mathcal{F}, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{M}_\zeta = f\mathcal{F},$$

$a, b, \ldots, f$ désignant six constantes indépendantes de $\mathcal{F}$; d'où

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{F}} = a, \qquad \frac{d\mathcal{T}_\eta}{d\mathcal{F}} = b, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\mathcal{M}_\zeta}{d\mathcal{F}} = f;$$

et, par suite,

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{F}}, \qquad \frac{d\mathcal{T}_\eta}{d\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{T}_\eta}{\mathcal{F}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\mathcal{M}_\zeta}{d\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{M}_\zeta}{\mathcal{F}};$$

ce qui prouve l'accord entre les deux expressions (27) et (34) du déplacement projeté λ. L'accord entre les deux expressions (28) (n° 21) et (35) (n° 36) de la rotation projetée φ, se démontre de la même manière.

Détermination des forces de liaisons surabondantes, dans les systèmes de corps à fibres moyennes. — Équation aux liaisons surabondantes.

39. La méthode de calcul des forces de liaisons surabondantes découle de l'équation générale de l'Élasticité. Pour en simplifier l'exposé, nous supposerons que le système hyperstatique considéré, déformé par des forces directement appliquées F et par une variation de température τ, est soumis à la flexion plane; dans ce cas (n° 35) l'équation générale de l'Élasticité se réduit à

$$(33') \quad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \int \left[\mathcal{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathcal{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathcal{M}\frac{M}{EI} \right] ds.$$

Comme forces et couples auxiliaires à appliquer au système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique considéré, adoptons :

1° Des forces $\mathcal{F}$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes *extérieures* du système hyperstatique;

2° Des couples $\mathcal{C}$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes *exté-*

rieures du système hyperstatique et ayant, comme ceux-ci, leurs axes normaux au plan de flexion;

3° Des forces $\mathcal{F}'$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes *intérieures* du système hyperstatique et, comme celles-ci, deux à deux égales et opposées;

4° Des couples $\mathcal{C}'$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes *intérieures* du système hyperstatique, ayant, comme ceux-ci, leurs axes normaux au plan de flexion et étant, comme ceux-ci, deux à deux égaux et de sens contraire.

Dès lors, l'équation (33') s'écrit

$$(a) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi + \sum \mathcal{F}'\lambda + \sum \mathcal{C}'\varphi = \int \left[\mathcal{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathcal{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathcal{M}\frac{M}{EI}\right] ds.$$

Il est facile de voir que son premier membre est nul.

En effet, les projections λ des déplacements élastiques des points d'application des forces auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, sur les directions de ces forces, ainsi que les rotations φ des sections d'application des couples auxiliaires $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, sont afférentes au système hyperstatique, déformé par les forces F et par la variation de température τ; or :

1° Sur les directions des forces $\mathcal{F}$, qui, par hypothèse, sont celles des forces de liaisons surabondantes extérieures, les projections λ sont nulles, en raison de ces liaisons mêmes, et, par suite, la somme $\sum \mathcal{F}\lambda$ est également nulle;

2° Les rotations φ des sections d'application des couples de liaisons surabondantes extérieures sont nulles en raison de ces liaisons mêmes, et, par suite, la somme $\sum \mathcal{C}\varphi$ est également nulle;

3° Par hypothèse, les forces auxiliaires $\mathcal{F}'$ sont deux à deux égales et opposées, de sorte qu'à toute force $+\mathcal{F}'$ correspond une force $-\mathcal{F}'$; or, ces deux forces $+\mathcal{F}'$ et $-\mathcal{F}'$ sont appliquées en deux points qui, dans le système hyperstatique, sont astreints à rester en contact, et dont, par conséquent, le déplacement projeté λ est

le même; donc, dans la somme $\sum \mathcal{F}'\lambda$, à chaque terme $+\mathcal{F}'\lambda$ correspond un terme $-\mathcal{F}'\lambda$, et, par suite, cette somme est nulle;

4° La somme $\sum \mathcal{C}\varphi$ est nulle pour la même raison.

L'équation (a) se réduit donc à

$$(36)\qquad \int \left[\mathcal{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathcal{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathcal{M}\frac{M}{EI}\right] ds = 0.$$

C'est l'*équation aux liaisons surabondantes*, dans laquelle les éléments de réduction N, T, M sont afférents au système hyperstatique considéré, soumis aux forces F et à la variation de température τ; et ceux $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$, au système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{C}'$ définis ci-dessus. Cette équation s'utilise de la manière suivante :

Supposons qu'il y ait :

m forces et n couples de liaisons surabondantes extérieures,
$2p$ forces et $2q$ couples de liaisons surabondantes intérieures.

Le nombre total des forces et couples de liaisons surabondantes est donc $m + n + 2(p+q)$; mais les forces et les couples de liaisons surabondantes intérieures étant, deux à deux, égaux et de sens contraire, le nombre des forces et couples inconnus se réduit à $m + n + p + q$.

L'emploi de l'équation aux liaisons surabondantes exige l'application (au système rendu isostatique par la suppression des liaisons surabondantes et soustrait à l'action des forces F et de la variation τ de température) de :

m forces auxiliaires $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$,
n couples auxiliaires $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$,
$2p$ forces auxiliaires $\mathcal{F}'_1, -\mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_p, -\mathcal{F}'_p$,
$2q$ couples auxiliaires $\mathcal{C}'_1, -\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_q, -\mathcal{C}'_q$,

forces et couples, de grandeurs arbitraires, — ayant, les forces, mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes, les couples, mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes.

Les éléments de réduction correspondants $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{M}$, en une section quelconque de l'un quelconque des corps du système, sont des fonctions linéaires et homogènes de ces forces et couples



auxiliaires; on peut donc écrire :

$$(a)\quad \begin{cases} \mathcal{N} = \mathcal{F}_1 \alpha_1 + \ldots + \mathcal{F}_m \alpha_m + \mathcal{C}_1 \beta_1 + \ldots + \mathcal{C}_n \beta_n \\ \qquad + \mathcal{F}'_1 \alpha'_1 + \ldots + \mathcal{F}'_p \alpha'_p + \mathcal{C}'_1 \beta'_1 + \ldots + \mathcal{C}'_q \beta'_q, \\ \mathcal{T} = \mathcal{F}_1 \gamma_1 + \ldots + \mathcal{F}_m \gamma_m + \mathcal{C}_1 \delta_1 + \ldots + \mathcal{C}_n \delta_n \\ \qquad + \mathcal{F}'_1 \gamma'_1 + \ldots + \mathcal{F}'_p \gamma'_p + \mathcal{C}'_1 \delta'_1 + \ldots + \mathcal{C}'_q \delta'_q, \\ \mathcal{M} = \mathcal{F}_1 \varepsilon_1 + \ldots + \mathcal{F}_m \varepsilon_m + \mathcal{C}_1 \theta_1 + \ldots + \mathcal{C}_n \theta_n \\ \qquad + \mathcal{F}'_1 \varepsilon'_1 + \ldots + \mathcal{F}'_p \varepsilon'_p + \mathcal{C}'_1 \theta'_1 + \ldots + \mathcal{C}'_q \theta'_q, \end{cases}$$

où

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \theta'$$

sont des fonctions des coordonnées x et y du centre de gravité de la section considérée.

Portons ces expressions dans l'équation (36) aux liaisons surabondantes et groupons les termes contenant respectivement en facteur les forces et couples auxiliaires

$$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n, \mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_p, \mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_q.$$

L'équation ainsi transformée renferme $m+n+p+q$ groupes; et, pour qu'elle soit satisfaite, il faut que chacun de ces groupes soit séparément nul, attendu que les forces et couples auxiliaires sont de grandeurs arbitraires; on a, dès lors, les $m+n+p+q$ équations suivantes :

$$(b)\quad \begin{cases} \int \left[\alpha_1 \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \gamma_1 \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} + \varepsilon_1 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int \left[\alpha_m \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \gamma_m \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} + \varepsilon_m \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0, \\ \int \left[\beta_1 \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \delta_1 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{G}\Omega} + \theta_1 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int \left[\beta_n \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \delta_n \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} + \theta_n \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0, \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(b')\quad \begin{cases} \int \left[\alpha'_1 \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \gamma'_1 \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} + \varepsilon'_1 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int \left[\alpha'_p \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \gamma'_p \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} + \varepsilon'_p \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0, \\ \int \left[\beta'_1 \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \delta'_1 \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} + \theta'_1 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int \left[\beta'_q \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} - \alpha\tau \right) + \delta'_q \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{G}\Omega} + \theta'_q \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \right] ds = 0. \end{cases}$$

Ces équations, si l'on y remplace N, T et M en fonction des $m + n + p + q$ forces et couples de liaisons surabondantes inconnus, fournissent les valeurs de ces forces et couples.

Remarque. — Les équations (b) expriment les liaisons surabondantes extérieures, et, les équations (b'), les liaisons surabondantes intérieures.

On peut former ces équations d'une manière un peu différente, qui, dans certains cas, est plus commode. Ainsi, pour former la première des équations (b), au lieu d'appliquer au système rendu isostatique toutes les forces et tous les couples auxiliaires indiqués plus haut, il suffit de lui appliquer exclusivement la seule force auxiliaire $\mathcal{F}_1$; les formules (a) se réduisent alors à

$$\mathfrak{N} = \mathcal{F}_1 \alpha_1, \qquad \mathfrak{T} = \mathcal{F}_1 \gamma_1, \qquad \mathfrak{M} = \mathcal{F}_1 \varepsilon_1 ;$$

et la substitution de ces expressions de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{M}$, dans l'équation (36), donne la première des équations (b). Le même procédé est applicable à la formation successive des autres équations (b).

De même, pour former la première des équations (b'), il suffit d'appliquer, au système rendu isostatique, les deux forces auxiliaires $\mathcal{F}'_1$ et $-\mathcal{F}'_1$, à l'exclusion des autres forces et couples auxiliaires; les formules (a) se réduisent alors à

$$\mathfrak{N} = \mathcal{F}'_1 \alpha'_1, \qquad \mathfrak{T} = \mathcal{F}'_1 \gamma'_1, \qquad \mathfrak{M} = \mathcal{F}'_1 \varepsilon'_1 ;$$

et la substitution de ces expressions de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{M}$, dans l'équation (36), donne la première des équations (b'). Le même procédé est applicable à la formation successive des autres équations (b').

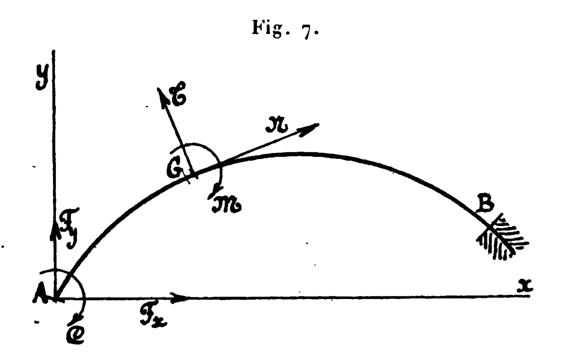
Exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes extérieures.

40. Considérons l'*arc encastré à ses deux extrémités*, pris au n° 23 (*fig.* 4) comme exemple d'application du théorème du général Menabrea généralisé, à la détermination des forces de liaisons surabondantes extérieures. Cet arc est soumis à des forces situées dans le plan de sa fibre moyenne, ainsi qu'à une variation τ de température, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisés les encastrements.

Nous avons vu que les réactions de l'encastrement de gauche sont réductibles, au centre de gravité A de la section encastrée, à deux forces X et Y, rectangulaires entre elles, et à un couple Z d'axe normal au plan de la fibre moyenne de l'arc; ce sont les deux forces et le couple de liaisons surabondantes; il s'agit de les déterminer.

A cet effet, selon la méthode exposée au n° 39, l'arc étant rendu isostatique par la suppression de l'encastrement de gauche (*fig.* 7), appliquons, au point A, deux forces auxiliaires $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_y$, de

Fig. 7.



mêmes directions que X et Y et, à la section dont ce point est le centre de gravité, un couple $\mathcal{C}$, d'axe normal ou plan de la fibre moyenne (forces et couple de grandeurs arbitraires).

Les éléments de réduction correspondants $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{M}$, au centre de gravité G(x, y) d'une section quelconque de l'arc, ont pour expression

$$\mathcal{N} = \mathcal{F}_x \frac{dx}{ds} + \mathcal{F}_y \frac{dy}{ds},$$

$$\mathcal{T} = -\mathcal{F}_x \frac{dy}{ds} + \mathcal{F}_y \frac{dx}{ds},$$

$$\mathcal{M} = -\mathcal{F}_x y + \mathcal{F}_y x + \mathcal{C}.$$

Portons ces expressions dans l'équation (36) (n° 39) aux liaisons surabondantes et groupons les termes contenant respectivement en facteur $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y$ et $\mathcal{C}$; il vient

$$\mathcal{F}_x \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{dx}{ds} - \frac{T}{G\Omega} \frac{dy}{ds} - \frac{My}{EI} \right] ds$$
$$+ \mathcal{F}_y \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{dy}{ds} + \frac{T}{G\Omega} \frac{dx}{ds} + \frac{Mx}{EI} \right] ds + \mathcal{C} \int \frac{M}{EI} ds = 0,$$

$\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y$ et $\mathcal{C}$ étant de grandeurs arbitraires, pour que cette équation

soit satisfaite, il faut qu'on ait séparément

$$\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)\frac{dx}{ds}-\frac{T}{G\Omega}\frac{dy}{ds}-\frac{My}{EI}\right]ds=0,$$

$$\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)\frac{dy}{ds}+\frac{T}{G\Omega}\frac{dx}{ds}+\frac{Mx}{EI}\right]ds=0,$$

$$\int\frac{M}{EI}ds=0.$$

Si, dans ces trois équations, on remplace N, T et M par leurs expressions (*b*) (n° 23), en fonction des inconnues X, Y et Z, on obtient les trois équations (*c*) (même numéro) qui déterminent ces inconnues.

Exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes intérieures.

41. Reprenons l'exemple déjà considéré au n° 24 (*fig.* 5) : ***Arc encastré à ses deux extrémités et comportant une rotule*** O, soumis à des forces situées dans le plan de sa fibre moyenne, ainsi qu'à une variation τ de température comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisés les encastrements.

Nous avons vu que cet arc est, en réalité, un système de deux arcs AO et OB, encastrés, chacun, à l'une des extrémités et réunis entre eux par la rotule O; que les forces de liaisons surabondantes sont deux forces X et Y normales entre elles, appliquées à l'extrémité O de l'arc OB et deux forces —X et —Y appliquées à l'extrémité O de l'arc AO. Ce sont ces deux forces qu'il s'agit de déterminer.

A cet effet, selon la méthode générale du n° 39, le système étant rendu isostatique par la suppression de la rotule O, qui crée les liaisons surabondantes intérieures, appliquons-lui (*fig.* 8) des forces auxiliaires $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $-\mathfrak{F}_x$ et $-\mathfrak{F}_y$, de grandeurs arbitraires, ayant respectivement même point d'application et même direction que les forces de liaisons surabondantes X, Y, — X et —Y. Les éléments de réduction correspondants $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{M}$, au centre de gravité G (x, y) d'une section quelconque de l'un ou l'autre des deux arcs AO et OB ont pour expressions

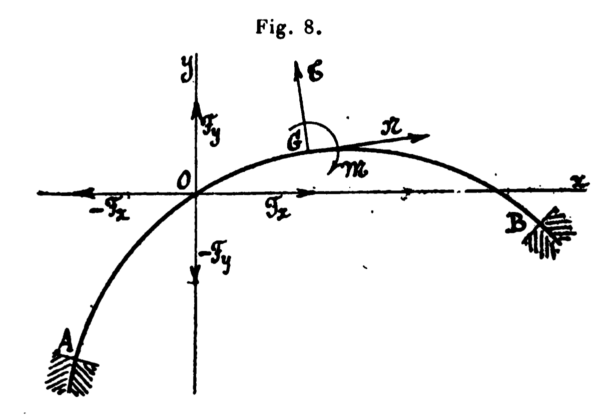
$$\mathfrak{N} = \mathfrak{F}_x\frac{dx}{ds}+\mathfrak{F}_y\frac{dy}{ds},$$

$$\mathfrak{T} =-\mathfrak{F}_x\frac{dy}{ds}+\mathfrak{F}_y\frac{dx}{ds},$$

$$\mathfrak{M} =-\mathfrak{F}_x y+\mathfrak{F}_y x.$$

Portons ces expressions dans l'équation (36) (n° 39) aux liaisons surabondantes et séparons-y les termes en deux groupes contenant respectivement en facteur $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_y$; pour que l'équation ainsi trans-

Fig. 8.



formée soit satisfaite, il faut que chacun de ces deux groupes soit séparément nul, puisque les forces auxiliaires $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_y$ sont de grandeurs arbitraires. Nous obtenons, de la sorte, les deux équations

$$\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)\frac{dx}{ds}-\frac{T}{G\Omega}\frac{dy}{ds}-\frac{My}{EI}\right]ds=0,$$
$$\int\left[\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)\frac{dy}{ds}+\frac{T}{G\Omega}\frac{dx}{ds}+\frac{Mx}{EI}\right]ds=0.$$

Si, dans ces deux équations, on remplace N, T et M par leurs expressions (*b*) (n° 24), en fonction des inconnues X et Y, on obtient les deux équations (*c*) (même numéro) qui déterminent ces inconnues.

Autre exemple de la détermination des forces de liaison surabondantes intérieures.

42. Reprenons l'exemple déjà considéré au n° 25 (*fig.* 6) : *poutre droite, à treillis double, articulée,* reposant sur deux appuis simples et soumise à des charges appliquées aux nœuds.

Avant de faire usage de l'équation (36) (n° 39) aux liaisons surabondantes, remarquons que, dans le cas présent, elle se simplifie comme suit :

Les forces élastiques produites par les charges, en toute section d'une barre quelconque de la poutre, sont réductibles exclusivement à l'effort normal N (l'effort tranchant et le couple de flexion sont

nuls); de plus, cet effort normal est le même dans toutes les sections de la barre, et, ainsi qu'il a été dit au n° 25, il porte le nom d'*effort* dans la barre. Nous verrons plus loin que, de même, les forces élastiques produites par les forces auxiliaires $\mathcal{F}$, en toute section d'une barre quelconque, sont réductibles exclusivement à l'effort normal $\mathcal{N}$ et que cet effort est le même dans toutes les sections de la barre. L'équation (36), suppression faite du terme relatif à la variation de température, laquelle n'intervient pas ici, se réduit donc à

$$\int \mathcal{N} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} ds = 0,$$

l'intégrale étant prise pour la longueur totale des fibres moyennes de toutes les barres.

Or, pour une barre, de longueur s, on a, puisque N et $\mathcal{N}$ sont constants, ainsi d'ailleurs que Ω,

$$\int_0^s \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E}\Omega} ds = \mathcal{N} \frac{\mathrm{N}s}{\mathrm{E}\Omega}.$$

Par conséquent, en désignant par m le nombre des barres constituant la poutre, on a

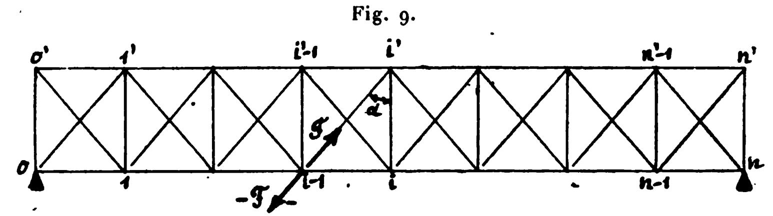
$$(a) \qquad \sum_1^m \mathcal{N} \frac{\mathrm{N}s}{\mathrm{E}\Omega} = 0.$$

Ceci posé, nous avons vu, au n° 25, que les liaisons surabondantes de la poutre sont les liaisons des diagonales $(0, 1')$, ..., $(i-1, i')$, ..., $(n-1, n')$, avec les nœuds inférieurs d'attache 0, ..., $i-1$, ..., $n-1$ et que, pour la diagonale $(i-1, i')$, par exemple, les forces de liaisons surabondantes sont deux forces de même grandeur et de même direction que l'effort Z'_i dans cette diagonale, et appliquées, l'une, à l'extrémité rendue libre de ladite diagonale, l'autre, au nœud $i-1$, — forces de sens répulsif ou attractif, selon que Z'_i est un effort de compression ou de tension.

Dès lors, selon la remarque finale du n° 39, la poutre étant rendue isostatique par la suppression des liaisons surabondantes et soustraite à l'action des charges, appliquons à l'extrémité inférieure de la diagonale $(i-1, i')$ (*fig.* 9), une force auxiliaire $\mathcal{F}$, dirigée suivant la fibre moyenne de cette diagonale, et une force $-\mathcal{F}$ au nœud $i-1$. Il est clair que : 1° ces deux forces auxiliaires ne produisent aucune force élastique dans les barres de la poutre autres que celles du panneau (i), de sorte que, dans ces barres, $\mathcal{N} = 0$; 2° dans chacune des barres du panneau (i), les forces élastiques que

les forces auxiliaires engendrent, en toute section, sont réductibles exclusivement à l'effort normal $\mathcal{N}$ et cet effort est constant tout le long d'une même barre. Les valeurs dudit effort normal $\mathcal{N}$, dans les

Fig. 9.



six barres du panneau (i), se calculent immédiatement par la Statique pure; elles sont indiquées dans la seconde colonne du Tableau ci-après. Dans les trois dernières colonnes de ce Tableau sont reproduites les notations spéciales adoptées au n° 25, pour représenter les efforts N produits dans les barres par les charges, ainsi que les longueurs s et les sections Ω de ces barres.

Désignation des barres.		Efforts produits par les forces auxiliaires $\mathcal{F}$ et $-\mathcal{F}$: $\mathcal{N} =$	Efforts produits par les charges : $N =$	Longueurs des barres : $s =$	Sections des barres : $\Omega =$
Éléments de membrures	$(i-1, i)$....	$-\mathcal{F}\sin\alpha$	X_i	a	Ω_i
	$(i'-1, i')$....	$-\mathcal{F}\sin\alpha$	X'_i	a	Ω'_i
Montants...	$(i-1, i'-1)$.	$-\mathcal{F}\cos\alpha$	Y_{i-1}	b	ω_{i-1}
	(i, i')........	$-\mathcal{F}\cos\alpha$	Y_i	b	ω_i
Diagonales..	$(i'-1, i)$.....	$\mathcal{F}$	Z_i	c	S_i
	$(i-1, i')$....	$\mathcal{F}$	Z'_i	c	S'_i

α = angle aigu des fibres moyennes des diagonales avec la verticale.

A chacune des six barres du panneau (i) correspond un terme, dans la somme $\sum_1^m$ de l'équation (a); les termes correspondant aux autres barres de la poutre sont nuls, puisque, pour chacune de ces barres, $\mathcal{N} = 0$. Par suite, l'équation (a) s'écrit sous la forme suivante, suppression faite du facteur commun $\mathcal{F}$ et du dénominateur commun E,

$$-a\sin\alpha\left(\frac{X_i}{\Omega_i}+\frac{X'_i}{\Omega'_i}\right)-b\cos\alpha\left(\frac{Y_{i-1}}{\omega_{i-1}}+\frac{Y_i}{\omega_i}\right)+c\left(\frac{Z_i}{S_i}+\frac{Z'_i}{S'_i}\right)=0.$$

Si, dans cette dernière équation, on remplace Z_i, X_i, X'_i, Y_{i-1} et Y_i par leurs expressions (c) à (g) (n° 25), obtenues par la Statique pure, et si l'on tient compte de ce que

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

on retrouve l'équation finale (k) du n° 25.

MÉTHODE FONDÉE SUR LE THÉORÈME DU TRAVAIL VIRTUEL.

43. Le théorème du travail virtuel a été utilisé, pour la première fois, en Résistance des matériaux, par Möhr [1], pour la détermination des efforts dans les systèmes articulés à barres surabondantes.

Depuis, les applications de ce théorème, aux autres systèmes employés en construction ont été largement développées par divers auteurs, notamment par Muller-Breslau [2].

Enfin, ce même théorème nous a permis d'établir l'*équation générale de l'élasticité* [3], dont nous venons de donner plus haut (n°s 32 et 33) une démonstration nouvelle déduite du théorème des forces vives.

Équation générale de l'Élasticité.

44. Soit un système de corps isotropes; supposons-le hyperstatique extérieurement et intérieurement (n° 11) (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier; celui d'un corps unique, également). Ce système de corps est déformé sous l'action de forces extérieures F, directement appliquées, et d'une variation de température de τ degrés, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées les diverses liaisons du système.

---

(1) *Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1874, p. 223.

(2) *Die Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstructionen*, 1886.

(3) *L'équation générale de l'élasticité des constructions et ses applications* (*Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, octobre 1907, p. 365).

Appelons :

1°
$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

les projections des déplacements élastiques et calorifiques d'un certain nombre de points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots,$$

du système de corps, sur des directions arbitrairement choisies

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2°
$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots$$

les projections des rotations élastiques et calorifiques d'un certain nombre de droites

$$a_1 a'_1, \quad a_2 a'_2, \quad a_3 a'_3, \quad \ldots,$$

contenues dans le système de corps, sur des directions

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots,$$

arbitrairement choisies parmi les directions normales à ces droites;

3°
$$\varepsilon_x - \alpha\tau, \quad \varepsilon_y - \alpha\tau, \quad \varepsilon_z - \alpha\tau, \quad \gamma_{yz}, \quad \gamma_{zx}, \quad \gamma_{xy}$$

les six paramètres de la déformation élastique et calorifique (n° 5) d'un parallélépipède élémentaire, pris en un point quelconque (x, y, z) du système;

4° ϖ_F le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume, au même point (x, y, z);

5° F_{es} et F_{is} les forces de liaisons surabondantes extérieures et intérieures du système.

Considérons maintenant le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné. Si on le soumet aux forces F, F_{es} et F_{is}, ainsi qu'à la variation de température de τ degrés, il prend un état d'équilibre élastique identique à celui du système hyperstatique soumis aux seules forces F et à la variation de température. En particulier, dans ce système isostatique, les déplacements élastiques et calorifiques des points A_1, A_2, A_3, ..., les rotations élastiques et

calorifiques des droites $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$, $a_3 a'_3$, ... et les paramètres de la déformation d'un parallélépipède quelconque sont les mêmes que dans le système hyperstatique.

Le potentiel interne est également le même, de sorte qu'on peut écrire, d'après la formule (4) (n° 4) et la Remarque finale du n° 5,

$$(a) \qquad \bar{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} = \varpi_F = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{\mu}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2),$$

en désignant par $\bar{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume au point (x, y, z), du système isostatique déformé par les forces F, F_{es}, F_{is} (la barre surmontant la lettre ϖ est destinée à indiquer que ce potentiel est relatif au système isostatique).

Au susdit système isostatique, supposé soustrait à l'action des forces F, F_{es}, F_{is} et de la variation de température, appliquons :

1° Aux points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots,$$

des *forces auxiliaires*, de grandeurs quelconques,

$$\mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_3, \quad \ldots,$$

suivant les directions

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2° Aux points

$$a_1, a'_1; \quad a_2, a'_2; \quad a_3, a'_3, \quad \ldots,$$

des forces formant des *couples auxiliaires*, de grandeurs quelconques,

$$\mathcal{C}_1, \quad \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_3, \quad \ldots,$$

d'axes dirigées suivant

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots.$$

Sous l'action de ces forces et couples auxiliaires, le système isostatique prend un nouvel état de déformation; soient :

$\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \ldots$ les nouvelles valeurs des déplacements projetés et des rotations projetées $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$;

ε'_x, ε'_y, ε'_z, γ'_{yz}, γ'_{zx}, γ'_{xy} les nouvelles valeurs des paramètres de la déformation d'un parallélépipède élémentaire pris en un point quelconque (x, y, z);

$\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume au point (x, y, z), potentiel qui a pour expression, d'après la formule (4) (n° 4),

$$(a')\quad \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}} = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z)^2 + \mu(\varepsilon'^2_x + \varepsilon'^2_y + \varepsilon'^2_z) + \frac{\mu}{2}(\gamma'^2_{yz} + \gamma'^2_{zx} + \gamma'^2_{xy});$$

$\overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$ le potentiel interne total du système, qui, d'après la formule (5) (n° 4), a pour valeur

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}} = \int\int\int \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\, dx\, dy\, dz.$$

Faisons subir, au système isostatique ainsi déformé, une déformation virtuelle compatible avec les liaisons de ce système; et soient $\delta\lambda'_1$, $\delta\lambda'_2$, $\delta\lambda'_3$, ..., $\delta\varphi'_1$, $\delta\varphi'_2$, $\delta\varphi'_3$, ..., $\delta\varepsilon'_x$, $\delta\varepsilon'_y$, $\delta\varepsilon'_z$, $\delta\gamma'_{yz}$, $\delta\gamma'_{zx}$, $\delta\gamma'_{xy}$, les variations virtuelles correspondantes des déplacements projetés, des rotations projetées et des paramètres de la déformation. Le théorème du travail virtuel donne immédiatement l'équation

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1\,\delta\lambda'_1 + \mathcal{F}_2\,\delta\lambda'_2 + \mathcal{F}_3\,\delta\lambda'_3 + \ldots + \mathcal{C}_1\,\delta\varphi'_1 + \mathcal{C}_2\,\delta\varphi'_2 + \mathcal{C}_3\,\delta\varphi'_3 \\
&\quad = \int\int\int\Bigg(\frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_x}\,\delta\varepsilon'_x + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_y}\,\delta\varepsilon'_y + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_z}\,\delta\varepsilon'_z \\
&\qquad + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\gamma'_{yz}}\,\delta\gamma'_{yz} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\gamma'_{zx}}\,\delta\gamma'_{zx} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\gamma'_{xy}}\,\delta\gamma'_{xy}\Bigg)dx\,dy\,dz;
\end{aligned}$$

le premier membre de cette équation représente, en effet, le travail virtuel des forces et couples auxiliaires [1], et le second membre, qui est la variation virtuelle du potentiel interne $\overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$, représente le travail virtuel, changé de signe, des forces intérieures.

La déformation virtuelle étant seulement astreinte à être compatible avec les liaisons du système isostatique considéré, on

---

[1] Les forces de liaison du système isostatique supposé soumis aux forces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, ... et aux couples $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, ... n'interviennent pas dans l'expression du travail, attendu que les travaux virtuels de ces forces de liaison sont nuls, en raison de ces liaisons mêmes.

peut prendre, pour cette déformation, la déformation réelle subie par ce système, sous l'action des forces F, F_{es}, F_{is} et de la variation de température de τ degrés, ce qui entraîne :

$$\begin{array}{llll} \delta\lambda'_1 = \lambda_1, & \delta\lambda'_2 = \lambda_2, & \delta\lambda'_3 = \lambda_3, & \ldots; \\ \delta\varphi'_1 = \varphi_1, & \delta\varphi'_2 = \varphi_2, & \delta\varphi'_3 = \varphi_3, & \ldots; \\ \delta\varepsilon'_x = \varepsilon_x - \alpha\tau, & \delta\varepsilon'_y = \varepsilon_y - \alpha\tau, & \delta\varepsilon'_z = \varepsilon_z - \alpha\tau; & \\ \delta\gamma'_{yz} = \gamma_{yz}, & \delta\gamma'_{zx} = \gamma_{zx}, & \delta\gamma'_{xy} = \gamma_{xy}; & \end{array}$$

et, par suite,

$$(b)\quad \mathcal{F}_1\lambda_1 + \mathcal{F}_2\lambda_2 + \mathcal{F}_3\lambda_3 + \ldots + \mathcal{C}_1\varphi_1 + \mathcal{C}_2\varphi_2 + \mathcal{C}_3\varphi_3 + \ldots$$
$$= \int\int\int\left(\frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_x}\varepsilon_x + \ldots + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\gamma'_{xy}}\gamma_{xy}\right)dx\,dy\,dz$$
$$- \alpha\tau\int\int\int\left(\frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_x} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_y} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_z}\right)dx\,dy\,dz,$$

étant admis que la variation de température τ est la même en tous les points du système.

Transformons les deux intégrales du second membre de l'équation (b). En ce qui concerne la première, imaginons qu'au système isostatique on applique simultanément : 1° les forces F, F_{es} et F_{is} ; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$, sans d'ailleurs soumettre ce système à aucune variation de température ; d'après le principe de la superposition, les paramètres de la déformation élastique, produite par l'ensemble de ces forces et couples, ont pour valeurs, en un point quelconque (x, y, z),

$$\varepsilon_x + \varepsilon'_x,\quad \varepsilon_y + \varepsilon'_y,\quad \varepsilon_z + \varepsilon'_z,\quad \gamma_{yz} + \gamma'_{yz},\quad \gamma_{zx} + \gamma'_{zx},\quad \gamma_{xy} + \gamma'_{xy};$$

par suite, en désignant par $\overline{\varpi}_{F,\,F_{es},\,F_{is},\,\mathcal{F},\mathcal{C}}$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume, en ce point du système déformé par les forces et couples précités, on a

$$(a'')\quad \overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}} = \frac{\lambda}{2}\left[(\varepsilon_x + \varepsilon'_x) + (\varepsilon_y + \varepsilon'_y) + (\varepsilon_z + \varepsilon'_z)\right]^2$$
$$+ \mu\left[(\varepsilon_x + \varepsilon'_x)^2 + (\varepsilon_y + \varepsilon'_y)^2 + (\varepsilon_z + \varepsilon'_z)^2\right]$$
$$+ \frac{\mu}{2}\left[(\gamma_{yz} + \gamma'_{yz})^2 + (\gamma_{zx} + \gamma'_{zx})^2 + (\gamma_{xy} + \gamma'_{xy})^2\right].$$

L'expression (a) de $\overline{\varpi}_{F,\,F_{es},\,F_{is}}$ est une fonction homogène et du

second degré des six quantités $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xy}$ et, pour passer de cette expression à celles (a') et (a'') de $\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$ et de $\varpi_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}}$, il suffit d'y remplacer ces six quantités, d'abord par $\varepsilon'_x, \ldots, \gamma'_{xy}$, puis par $(\varepsilon_x + \varepsilon'_x), \ldots, (\gamma_{xy} + \gamma'_{xy})$; par conséquent, en vertu de la propriété des fonctions homogènes et du second degré déjà utilisée au n° 33, on a identiquement

$$\frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_x} \varepsilon_x + \ldots + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \gamma'_{xy}} \gamma_{xy} = \overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right).$$

En multipliant les deux membres de cette identité par $dx\,dy\,dz$ et en l'intégrant pour le volume total occupé par le système de corps, on obtient

$$(c) \qquad \int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_x} \varepsilon_x + \ldots + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \gamma'_{xy}} \gamma_{xy}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right).$$

C'est l'expression transformée de la première intégrale du second membre de l'équation (b), expression dans laquelle $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}}$, $\overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$ et $\Pi_{F, F_{es}, F_{is}}$ représentent les valeurs du potentiel interne total du système isostatique, déformé respectivement par : 1° les forces F, F_{es}, F_{is}; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$; 3° l'ensemble de ces mêmes forces et couples.

Quant à la seconde intégrale de l'équation (b), on peut écrire, en vertu des formules (6) (n° 4),

$$(d) \qquad \int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_x} + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_y} + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \int\!\!\int\!\!\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\,dy\,dz,$$

en désignant par n'_x, n'_y, n'_z les fatigues normales sur trois éléments rectangulaires entre eux, menés en un point quelconque (x, y, z) du système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

En remplaçant les deux intégrales du second membre de l'équation (b), par leurs expressions (c) et (d), et en écrivant le pre-

mier membre sous forme abrégée, on obtient finalement

$$(37)\quad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}\right) - \alpha\tau \int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation générale (31) (n° 32) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes.

En reprenant la démonstration précédente dans le cas d'un système de corps à fibres moyennes, on retrouve également l'équation (32) (n° 33), dont le développement conduit à l'équation générale (33) (même numéro) de l'élasticité des systèmes dont il s'agit :

$$(38)\quad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \int \left[\mathcal{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathcal{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \mathcal{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI} \right] ds.$$

L'application de cette dernière équation au calcul des déplacements et des rotations élastiques et calorifiques, ainsi qu'à la détermination des forces de liaisons des systèmes hyperstatiques, a été exposée précédemment (n°s 36 et 39 à 42); il n'y a pas lieu d'y revenir.

45. Variantes de l'équation générale de l'élasticité. — I. *Cas des systèmes de corps isotropes.* — Pour établir, au n° 44, l'équation générale (37) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes, nous avons considéré le système *isostatique* obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné, et nous avons appliqué le théorème du travail virtuel à ce système supposé soumis aux forces et aux couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$, dont la grandeur est arbitraire, en prenant, comme déplacements virtuels, les déplacements réels résultant de la déformation du système hyperstatique soumis aux forces données F et à la variation de température donnée τ.

Si l'on reprend exactement la même démonstration, en considérant non plus ce système isostatique, mais le système *hyperstatique* donné, on obtient la variante que voici de l'équation (37) :

$$(39)\quad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \Pi_{F, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - (\Pi_F + \Pi_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}) - \alpha\tau \int\int\int (n''_x + n''_y + n''_z)\, dx\, dy\, dz,$$

en désignant par n''_x, n''_y, n''_z les fatigues normales sur trois éléments rectangulaires, menés en un point quelconque (x, y, z) du système hyperstatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

Si, enfin, on reprend encore la même démonstration, en considérant le système *isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement*, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes intérieures et de *toutes* les liaisons extérieures du système hyperstatique donné, et en supposant ce système soumis, non plus à des forces et couples auxiliaires de grandeurs absolument arbitraires, mais à des forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ astreints à la condition de s'équilibrer sur ledit système, on obtient la seconde variante

$$(40) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \overline{\overline{\Pi}}_{F, F_e, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - \left(\overline{\overline{\Pi}}_{F, F_e, F_{is}} + \overline{\overline{\Pi}}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}\right) - \alpha\tau \int\int\int (n'''_x + n'''_y + n'''_z)\, dx\, dy\, dz,$$

dans laquelle : $\overline{\overline{\Pi}}_{F, F_e, F_{is}}$, $\overline{\overline{\Pi}}_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}$ et $\overline{\overline{\Pi}}_{F, F_e, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}}$ désignent respectivement le potentiel interne total du système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement, déformé par : 1° les forces F données, toutes les forces de liaisons extérieures F_e du système hyperstatique donné et les forces de liaisons intérieures surabondantes F_{is} de ce dernier système; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$; 3° l'ensemble de ces forces et couples.

n'''_x, n'''_y, n'''_z sont les fatigues normales, sur trois éléments rectangulaires menés en un point quelconque (x, y, z) du système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

II. *Cas des systèmes de corps à fibres moyennes.* — Aux deux variantes, qui viennent d'être indiquées, de l'équation générale (37) (n° 44) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes, correspondent deux variantes de l'équation générale (38) (même numéro) de l'élasticité des systèmes de corps à fibres moyennes.

Ces deux dernières variantes montrent que, dans l'équation (38),

on peut, à volonté, considérer les éléments de réduction $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}_\eta, \ldots, \mathcal{M}_\xi$, comme résultant soit de l'application de forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$, de grandeurs arbitraires, au système *isostatique* défini précédemment ; soit de l'application de ces mêmes forces et couples au système *hyperstatique* donné ; soit, enfin, de l'application, au système *isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement*, défini précédemment, de forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ astreints à la condition de s'équilibrer sur ce système.

C'est au dernier de ces trois points de vue que nous nous sommes placés dans notre Mémoire déjà cité sur l'équation *générale de l'élasticité et ses applications;* ici, nous avons adopté le premier, parce qu'il rattache d'une manière plus directe la seconde méthode fondée sur le théorème des forces vives, à la méthode fondée sur le théorème du travail virtuel. En ce qui concerne la facilité des applications, ces deux points de vue sont d'ailleurs absolument équivalents : effectivement, qu'on choisisse l'un ou l'autre, les éléments de réduction $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}_\eta, \ldots, \mathcal{M}_\xi$ sont toujours statiquement déterminés et, par suite, se calculent aisément.

Le second point de vue n'a qu'un intérêt purement théorique.

Théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy, complété.

46. Ce théorème découle immédiatement de l'équation générale de l'élasticité. Considérons un système de corps isotropes ou à fibres moyennes ; supposons-le hyperstatique (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier ; celui d'un corps unique, également).

Appliquons-lui un premier système de forces (A). Soient : m le nombre de ces forces, F_{A_i} l'une quelconque d'entre elles, A_i son point d'application, Δ_i sa direction, Π_{F_A} le potentiel interne total du système de corps déformé par ces forces.

Remplaçons le système de forces (A) par un second système de forces (B). Soient : n le nombre des forces de ce second système, F_{B_i} l'une quelconque d'entre elles, B_i son point d'application, Δ_{B_i} sa direction, Π_{F_B} le potentiel interne total du système de corps déformé par ces forces.

Appelons :

$\lambda_{A_i}^{B}$ la projection, sur la direction Δ_{A_i}, du déplacement élastique du point A_i sous l'action du système de forces (B);

$\lambda_{B_i}^{A}$ la projection, sur la direction Δ_{B_i}, du déplacement élastique du point B_i, sous l'action du système de forces (A);

Π_{F_A,F_B} ou Π_{F_B,F_A} la valeur que prendrait le potentiel interne total du système de corps, si celui-ci était déformé par les deux systèmes de forces (A) et (B) agissant simultanément.

Cela posé, la variante (39) (n° 45) de l'équation générale de l'élasticité, si l'on y annule la variation de température τ, qui n'intervient pas dans la question présente, et si l'on y annule également les couples auxiliaires $\mathcal{C}$, se réduit à

$$\sum \mathcal{F}\lambda = \Pi_{F,\mathcal{F}} - (\Pi_F + \Pi_{\mathcal{F}}).$$

Cette équation appliquée à la déformation du système de corps, par le système de forces (B), donne immédiatement, si l'on prend comme forces auxiliaires $\mathcal{F}$, les forces du système A,

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda_{A_i}^{B} = \Pi_{F_B,F_A} - (\Pi_{F_B} + \Pi_{F_A}).$$

Appliquée à la déformation du système de corps, par le système de forces (A), cette même équation donne, si l'on prend comme forces auxiliaires les forces du système (B),

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda_{B_i}^{A} = \Pi_{F_A,F_B} - (\Pi_{F_A} + \Pi_{F_B}).$$

Les deux relations (*a*) et (*b*) sont précisément celles (*e*) et (*f*) (n° 29) qui se traduisent par le théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy, complété.

Application de l'Équation générale de l'Élasticité, à la Statique graphique des arcs élastiques.

47. Dans son magistral Traité de la Statique graphique, Maurice Levy a exposé de très remarquables méthodes graphiques, pour le

calcul des arcs élastiques, astreints à des liaisons surabondantes et soumis à des forces extérieures agissant dans le plan de leur fibre moyenne, ainsi qu'à une variation de température.

Ces méthodes ne tiennent compte que des déformations élastiques correspondant au couple de flexion; elles négligent celles correspondant à l'effort normal et à l'effort tranchant.

Elles sont fondées sur la propriété que possèdent des *forces fictives* parallèles entre elles, appliquées à chaque élément ds de la fibre moyenne de l'arc et égales à $\frac{M}{EI} ds$, M désignant le moment de flexion dans la section d'abscisse curviligne s, I le moment d'inertie de cette section et E le module d'élasticité longitudinale de la matière constituant l'arc. Ces propriétés, particulières à chaque type d'arc, résultent des conditions auxquelles celui-ci est astreint, dans sa déformation élastique, du fait de ses liaisons surabondantes; elles sont établies, dans le Traité de Maurice Levy, au moyen des expressions des déplacements élastiques, obtenues par les méthodes géométriques et cinématiques de calcul des déformations; elles se déduisent, d'ailleurs, plus simplement de l'équation aux liaisons surabondantes (n° 39) ou (ce qui, au fond, revient au même) de l'équation générale de l'élasticité des systèmes de corps à fibres moyennes,

$$(a) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \int \left[\mathcal{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \mathcal{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathcal{M}\frac{M}{EI} \right] ds,$$

réduite à

$$(b) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = -\alpha\tau \int \mathcal{N}\, ds + \int \mathcal{M}\frac{M}{EI}\, ds,$$

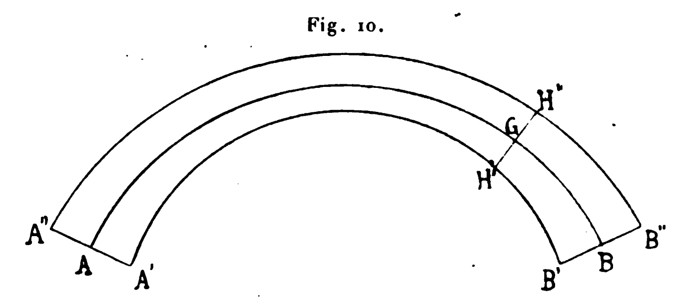
par la suppression des termes correspondant aux déformations dues à l'effort normal N et à l'effort tranchant T.

Le degré d'approximation qu'on obtient en négligeant ces déformations peut souvent être considéré comme suffisant; mais, dans certains cas, notamment lorsqu'il s'agit d'arcs surbaissés, il n'en est plus de même et il est alors nécessaire de tenir compte, sinon des déformations dues à l'effort tranchant qui sont toujours les plus faibles, du moins de celles dues à l'effort normal. On peut y parvenir par des correctifs assez simples qui, tout en n'altérant en rien la contexture des méthodes graphiques, permettent

d'y faire intervenir, à volonté, soit seulement ces dernières déformations, soit également celles dues à l'effort tranchant ([1]). Voici comment :

48. *Introduction des déformations dues à l'effort normal.* — r désignant le rayon de giration d'une section quelconque (S) de l'arc, autour de l'axe mené par le centre de gravité G de cette

Fig. 10.



section (*fig.* 10) normalement au plan de la fibre moyenne, portons, sur l'intersection de ce plan avec celui de la section (S),

$$GH' = GH'' = r.$$

Appelons :

Points conjugués relatifs à la section (S), les deux points H' et H'' qui ne sont autres que les deux sommets de l'ellipse centrale d'inertie de la section;

Lignes conjuguées, les deux lieux A'B' et A''B'' des points H' et H'' relatifs à toutes les sections de l'arc; à chaque élément ds de la fibre moyenne AB de l'arc correspondent deux éléments ds' et ds'' des lignes conjuguées;

Moments conjugués relatifs à la section (S), les deux sommes respectives des moments, par rapport à H' et à H'', des forces élastiques développées dans cette section (ou des forces extérieures agissant à gauche de cette même section);

M' et M'' les valeurs de ces moments, dans l'arc hyperstatique considéré, soumis à des forces extérieures données F et à une variation de température τ;

([1]) Bertrand de Fontviolant, *Mémoire sur la Statique graphique des arcs élastiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, 1890, p. 697, et *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, avril 1890, p. 403).

$\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ les valeurs de ces mêmes moments, dans l'arc isostatique, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de l'arc hyperstatique, et soumis à des forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

On a immédiatement

$$M' = M + Nr, \qquad M'' = M - Nr;$$

d'où

$$N = \frac{M' - M''}{2r}, \qquad M = \frac{M' + M''}{2}.$$

De même,

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{2r}, \qquad \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''}{2}.$$

Or, l'équation générale (a) (n° 47), suppression faite du terme correspondant aux déformations dues à l'effort tranchant, peut s'écrire

$$\sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{N} \frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{M} \frac{M}{EI} \right) ds.$$

En remplaçant, dans la seconde intégrale, les efforts normaux et les moments de flexion par leurs expressions ci-dessus, et en ayant égard à la relation $I = \Omega r^2$, on obtient, après réductions,

$$\sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{M}' \frac{M'}{2EI} + \mathfrak{M}'' \frac{M''}{2EI} \right) ds,$$

les intégrales s'étendant à la longueur totale de la fibre moyenne AB de l'arc.

Posons

$$I' = 2I$$

et convenons de représenter indistinctement par :

M′ l'un ou l'autre des deux moments conjugués M′ et M″;
$\mathfrak{M}'$ l'un ou l'autre des deux moments conjugués $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$;
ds' l'un ou l'autre des deux éléments ds' et ds'' des deux lignes conjuguées, correspondant à un élément ds de la fibre moyenne.

Moyennant cela, on peut écrire

$$(c) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \mathfrak{M}' \frac{M'}{EI'} \frac{ds}{ds'} ds',$$

la seconde intégrale s'étendant à la longueur totale des deux lignes conjuguées $A'B'$ et $A''B''$.

En comparant l'équation (b) (n° 47) qui néglige les déformations dues à l'effort normal, à l'équation (c) qui en tient compte, on voit que, pour passer de la première à la seconde, il suffit d'y remplacer les moments de flexion M et $\mathfrak{M}$ par les moments conjugués M' et $\mathfrak{M}'$, les moments d'inertie I, par $I' = 2I$, et d'y regarder la seconde intégrale comme étendue, non plus à la longueur totale de la ligne moyenne, mais bien à la longueur totale des deux lignes conjuguées.

On peut, dès lors, concevoir, sans entrer dans la démonstration donnée dans notre Mémoire sur la *Statique graphique des arcs élastiques*, que :

Pour introduire les déformations dues à l'effort normal, dans les méthodes de la Statique graphique qui les négligent, il suffit de remplacer, dans ces méthodes, les forces fictives parallèles $\frac{M}{EI}ds$, *appliquées aux divers éléments* ds *de la fibre moyenne de l'arc considéré, par des forces fictives*

$$\frac{M'}{EI'}\frac{ds}{ds'}ds' = \frac{M'}{EI'}ds,$$

parallèles aux premières et appliquées à chaque élément ds' *des deux lignes conjuguées.*

49. *Introduction des déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.* — Appelons *points conjugués* relatifs à une section quelconque (S), de centre de gravité G (*fig.* 11), les trois points H', H'', H''' qui, situés dans le plan de la fibre moyenne, ont pour coordonnées rapportées à la tangente Gx à cette fibre et à la normale Gy :

$$x' = \frac{r\sqrt{2a}}{2}, \qquad y' = -\frac{r\sqrt{6}}{2},$$

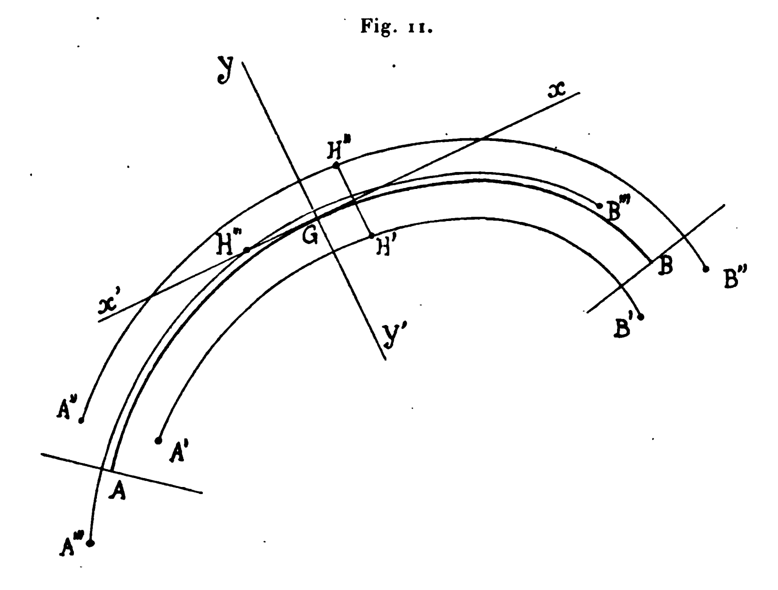
$$x'' = \frac{r\sqrt{2a}}{2}, \qquad y'' = \frac{r\sqrt{6}}{2},$$

$$x''' = -r\sqrt{2a}, \qquad y''' = 0,$$

a désignant le rapport du module d'élasticité longitudinale E au module d'élasticité transversale G.

Dès lors, par analogie avec ce qui a été dit précédemment, l'arc admet *trois lignes conjuguées* A'B', A''B'', A'''B''', et à chaque élément ds de sa fibre moyenne, correspondent trois éléments ds',

Fig. 11.



ds'' et ds''' des lignes conjuguées; de plus, à toute section (S) répondent *trois moments conjugués*.

Soient :

M', M'', M''' les valeurs de ces moments, dans l'arc hyperstatique considéré, soumis à des forces extérieures F et à une variation de température τ;

$\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$ les valeurs de ces mêmes moments, dans l'arc isostatique, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de l'arc hyperstatique, et soumis à des forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{C}$.

On a immédiatement

$$M' = M + N\frac{r\sqrt{6}}{2} + T\frac{r\sqrt{2a}}{2},$$

$$M'' = M - N\frac{r\sqrt{6}}{2} + T\frac{r\sqrt{2a}}{2},$$

$$M''' = M - Tr\sqrt{2a};$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{M' - M''}{r\sqrt{6}},$$

$$T = \frac{M' + M'' - 2M'''}{3r\sqrt{2a}},$$

$$M = \frac{M' + M'' + M'''}{3}.$$

De même,

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{r\sqrt{6}},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' - 2\mathfrak{M}'''}{3r\sqrt{2a}},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}'''}{3}.$$

En portant ces valeurs des efforts normaux, des efforts tranchants et des moments de flexion, dans la seconde intégrale de l'équation générale (a) (n° 47) écrite sous la forme

$$\sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{C}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{N}\frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathfrak{M}\frac{M}{EI} \right) ds,$$

on obtient, en tenant compte de ce que $a = \frac{E}{G}$ et de ce que $I = \Omega r^2$,

$$\sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{C}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{M}'\frac{M'}{3EI} + \mathfrak{M}''\frac{M''}{3EI} + \mathfrak{M}'''\frac{M'''}{3EI} \right) ds,$$

les intégrales s'étendant à la longueur totale de la fibre moyenne AB de l'arc.

Posons

$$I' = 3I$$

et convenons de représeuter indistinctement par :

M' l'un quelconque des trois moments conjugués M', M″ et M‴;
$\mathfrak{M}'$ l'un quelconque des trois moments conjugués $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ et $\mathfrak{M}'''$;
ds' l'un quelconque des trois éléments ds', ds'', ds''' des trois lignes conjuguées, correspondant à un élément ds de la fibre moyenne.

Dès lors, on peut écrire

$$(d) \qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{C}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \mathfrak{M}'\frac{M'}{EI'}\frac{ds}{ds'}\, ds',$$

la seconde intégrale s'étendant à la longueur totale des trois lignes conjuguées $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$.

Cette équation est exactement de même forme que l'équation (c) (nº 48), et l'on en conclut, comme précédemment, que :

Pour introduire les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant, dans les méthodes de la Statique graphique qui les négligent, il suffit de remplacer, dans ces méthodes, les forces fictives parallèles $\frac{M}{EI}ds$ *appliquées en chaque élément ds de la fibre moyenne de l'arc, par des forces fictives*

$$\frac{M'}{EI'}\frac{ds}{ds'}ds' = \frac{M'}{EI'}ds,$$

parallèles aux premières et appliquées à chaque élément ds' *des trois lignes conjuguées.*

Ajoutons qu'ainsi qu'il est établi dans notre Mémoire précité, à une section de l'arc ne correspond pas qu'un seul système de trois points conjugués, mais bien une infinité, et, par suite, une infinité de systèmes de trois moments conjugués; qu'un arc admet, par conséquent, une infinité de systèmes de trois lignes conjuguées. La proposition ci-dessus est applicable à l'un quelconque de ces systèmes; mais le plus commode entre tous, à utiliser dans les applications, est celui défini plus haut.

Comparaison entre les trois méthodes.

50. De l'exposé qui précède se dégagent les quelques remarques suivantes :

Les méthodes présentées sont entièrement concordantes et toutes trois tiennent compte non seulement des effets des forces extérieures, mais aussi des effets calorifiques.

Bien qu'ayant entre elles des rapports étroits, elles n'ont ni la même portée ni le même caractère théoriques :

La première conduit, comme les deux autres, aux principes de réciprocité qui sont des cas particuliers du théorème de Betti,

Boussinesq et Maurice Levy; mais, dans son état actuel, elle ne permet d'établir directement ni ce beau théorème, ni l'équation générale de l'élasticité, synthèse de toute la théorie des déformations; elle est donc, à cet égard, moins satisfaisante que les deux dernières. Au point de vue de l'exposé, cette première méthode, fondée sur le théorème des forces vives, est assez délicate, du moins dans la partie relative aux déformations calorifiques, qui nécessite l'extension faite ici de l'équation de Clapeyron.

La seconde méthode, également déduite du théorème des forces vives, est, au contraire, simple et élémentaire.

La troisième méthode, tirée du théorème du travail virtuel, fait appel à des notions de Mécanique générale plus élevées, mais elle permet de mettre en compte, dès le début et simultanément, les déformations calorifiques et les déformations élastiques.

A cette troisième méthode, il a été reproché de reposer sur une base peu solide, parce qu'il n'existerait pas, a-t-on dit, de démonstration rigoureuse du théorème du travail virtuel. Sans entrer, à ce sujet, dans une discussion qui ne saurait trouver place ici, nous croyons devoir rappeler que, dans l'une des Notes dont il a illustré la *Mécanique analytique* de Lagrange ([1]), l'un des mathématiciens les plus subtils du siècle dernier, Joseph Bertrand, s'exprime ainsi : « La première démonstration *rigoureuse* du principe des vitesses virtuelles est due à Fourier (*Journal de l'École Polytechnique,* t. II, an VII). » Au surplus, dans les nombreuses applications qui en ont été faites, le théorème du travail virtuel n'a jamais, que nous sachions, été trouvé en défaut, et, ainsi qu'il ressort de la présente Note, les résultats auxquels il conduit, en ce qui concerne spécialement les calculs de déformation, sont entièrement d'accord avec ceux déduits du théorème des forces vives.

([1]) *Œuvres de Lagrange* (publiées par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux), t. XI, 1888, p. 263.

TABLE DES MATIÈRES.

